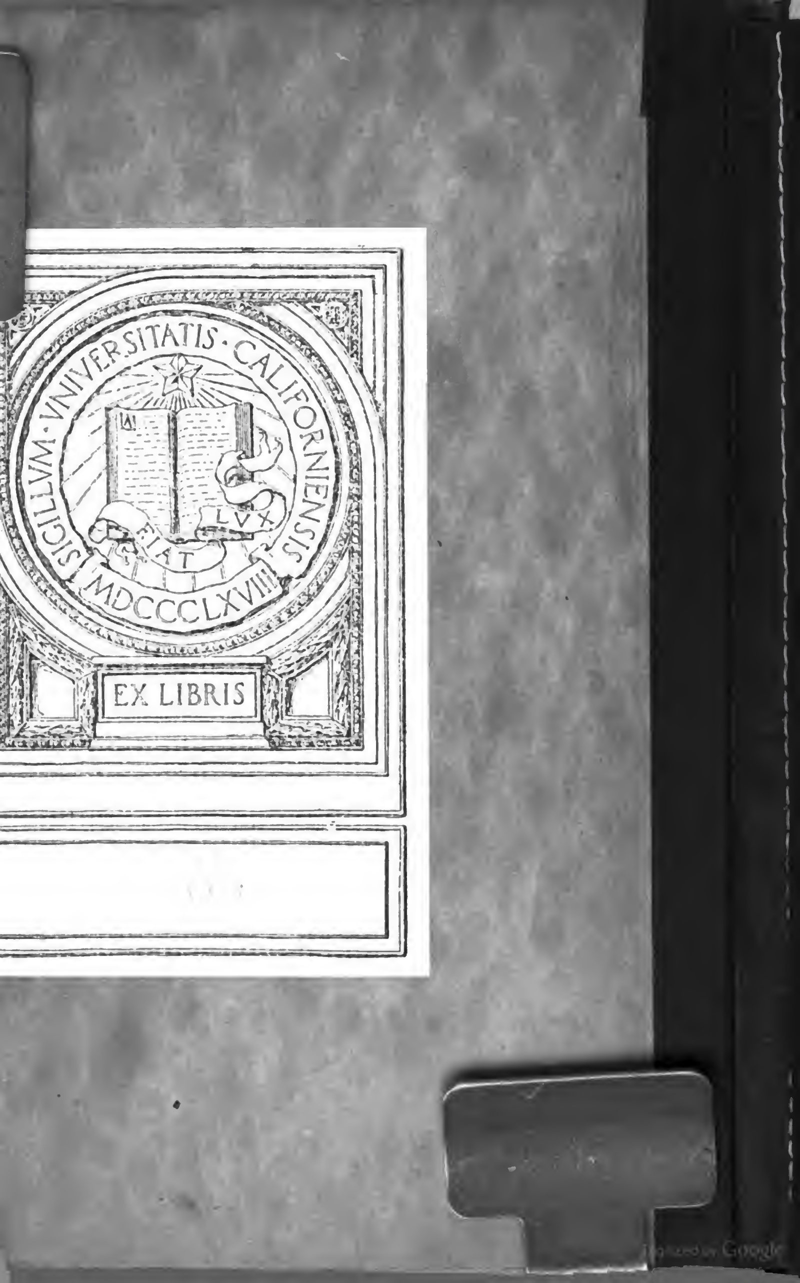

UC-NRLF
$B 532 140


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

MATHEMATISCH-
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 25

W. LIETZMANN

RIESEN UND ZWERGE IM ZAHLENREICH



VERLAG B. G. TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN



MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
25

RIESEN UND ZWERGE IM ZAHLENREICH

PLAUDEREIEN FÜR KLEINE UND GROSSE FREUNDE DER RECHENKUNST

VON

DR. W. LIETZMANN
DIREKTOR DER OBERREALSCHULE
IN JENA

ZWEITE, DURCHGESEHENE
UND VERMEHRTE AUFLAGE
(5. BIS 9. TAUSEND)

MIT 18 FIGUREN IM TEXT



1918
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER





VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Das Büchlein will dem Leser einige fröhliche Stunden bringen. Tut es das, dann wird es mithelfen, Zahlverständnis und Zahlanschauung zu fördern. Daß wir Menschen so etwas brauchen können, ja bitter not haben, das lehrt uns jeder Tag in dieser kriegerischen Gegenwart. So steht hinter dem lustigen Gesicht ein ernster Gedanke.

Jena, im August 1916.

W. Lietzmann.

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Mein kleines Buch hat viele Freunde gefunden. Beweis dessen ist mir, daß die starke Auflage so schnell aufgebraucht war, mehr aber noch eine große Anzahl von Briefen und Kartengrüßen, die mir aus allen Gegenden, namentlich auch aus den Schützengräben in Ost und West, zugegangen sind. Wenn nun die Plaudereien, hier und da durch eine kleine Geschichte vermehrt, wieder hinausgehen, so mögen sie Grüße mitnehmen an die alten Freunde und neue sich gewinnen.

Jena, im März 1918.

W. Lietzmann.

INHALT



1. VOM ZÄHLEN

Nimm dir einen Bogen Papier und zeichne eine Anzahl kleiner Kreise darauf, so etwa, wie du es in der nebenstehenden Fig. 1 siehst. Dann sage deinem Freund, er möge die Augen schließen; du legst das Blatt mit den Kreisen vor ihn und befiehlst ihm nun, die Augen schnell zu öffnen und gleich wieder zu schließen. Jetzt soll er sagen, wieviel Kreise er gesehen hat. Du wirst merken, daß er fast immer daneben rät — wenn er nicht gemogelt hat, aber das wollen wir ihm nicht zutrauen. Also kann dein Freund nicht einmal bis neun zählen, wirst du denken, wenn du etwa auch wie wir in Fig. 1 gerade neun Kreise gezeichnet hast.

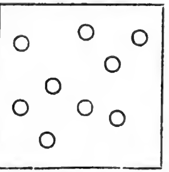


Fig. 1.

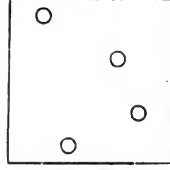


Fig. 2.

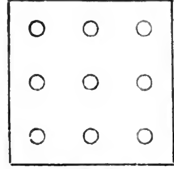
Jetzt mache das kleine Experiment noch einmal. Wir wollen nur vier Kreise hinmalen, etwa so wie in Fig. 2. Dein Freund wird jetzt ziemlich sicher die richtige Anzahl angeben. Du kannst daraus schließen, daß wir nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Gegenständen gleichzeitig übersehen können. Vielleicht machst du dich nun daran, bei einigen deiner Freunde oder bei dir selbst festzustellen, wo die Grenze zwischen der Anzahl der übersehbaren und der nicht übersehbaren Dinge liegt.

Du wirst es nun begreiflich finden, warum es so schwer ist, die Zahl von Dingen, die man nur für einen Augenblick angesehen hat, genau anzugeben. Als einmal im großen Kriege wie leider nicht selten über einer Stadt Süddeutschlands französische Flieger erschienen, las man in den ersten Depeschen, es seien ihrer fünf gewesen. Die Franzosen meldeten nachher, es seien in Wirklichkeit 23 gewesen. Das ist nun freilich ein Unterschied, daß man fast an eine andere Deutung denkt, aber erklärlich ist die erste flüchtige Schätzung nach deinen Versuchen auch ohne weiteres. Ich will

dir aber noch ein anderes Beispiel geben, das du gleich bei der nächsten Gelegenheit selbst erproben kannst; es ist ein sehr unterhaltsames Gesellschaftsspiel und ohne irgend welche Vorbereitungen ausführbar. Einer der Anwesenden muß sich umdrehen. Die anderen legen mehrere Gegenstände in eine Reihe auf den Tisch, wie sie gerade zur Hand sind: ein Taschenmesser, eine Schere, einen Bleistift, ein Stückchen Papier, einen Knopf, eine Briefmarke und so fort. Jetzt darf sich das „Versuchskaninchen" umdrehen und die Reihe der Gegenstände ein Weilchen, vielleicht zwei Minuten lang, betrachten. Dann soll er dem Tisch wieder den Rücken kehren und aufzählen, was er behalten hat. Du wirst staunen, wie wenig es ist, und wenn du selbst Versuchsperson bist, wirst du dir den Kopf beim Grübeln über die fehlenden Gegenstände zerbrechen. Auch hier ist es eine dankbare Aufgabe, den Auffassungsbereich bei den einzelnen Personen festzustellen.

Du wirst vielleicht sagen, das waren eben verschiedenartige Gegenstände; dein Einwurf ist ganz recht. Ich habe dir auch deshalb etwas mehr Zeit gelassen. Aber damit du noch einen Versuch mit gleichartigen Dingen machst: Eben hatte die Uhr geschlagen. Wieviel Mal war es?

Nun ist es gar nicht so schwer, durch einen Kunstgriff die Zahl der übersehbaren Gegenstände zu vergrößern. Wenn ich die neun Kreise der Fig. 1 so anordne, wie es Fig. 3 hier anzeigt, so wird dir die Versuchsperson wahrscheinlich schon beim ersten Blick die richtige Zahl sagen. Ich kann dir auch verraten, wie du bei jenem Gesellschaftsspiel Aussicht bekommst, besser abzuschneiden. Du denkst dir schnell, wenn du die Gegenstände siehst, eine Geschichte aus, je absonderlicher, um so besser. Also etwa: Ein einbeiniges Messer und eine zweibeinige Schere gehen spazieren, da treffen sie einen Bleistift. Den mußt du anspitzen, sagt die Schere zum Messer, ich schneide inzwischen von dem Papier ein Stückchen ab, dann schreibt uns der Bleistift einen Brief und wir siegeln ihn, da wir nichts anderes haben, mit dem Knopf und kleben die Briefmarke drauf, usf. Die Geschichte ist zwar reichlich „verdreht", aber das schadet nichts, um so eher behältst du sie. Das Kunststück


Fig. 3.

ist nur, in den zwei Minuten eine solche Geschichte auszudenken. Probier's einmal!

Wenn deine Versuchsperson, der du die erste Figur vorgelegt hast, wissen will, wieviel Kreise denn nun eigentlich auf dem Blatt Papier waren, so wird sie die Dinge einfach zählen. Auch der Mann, der die erste Depesche über jene Flieger losließ, hätte erst zählen sollen. Warum war das nicht so einfach, wie hier mit den Kreisen? Es mögen mehrere Gründe da gewesen sein, einer war aber jedenfalls der, daß die Flieger nicht still hielten, wie die Kreise auf dem Papier. Will der Lehrer auf einem Klassenausflug seine Schäflein zählen, so sagt er vorher: „Alle für einen Augenblick stillstehen."

Man kann auch Dinge lediglich nach der Erinnerung zählen, der eine stellt sich dabei geschickter an als der andere. Wenn dich jemand fragt, wieviel Fenster deine Schule nach vornheraus hat, dann wirst du wahrscheinlich die Antwort nicht sofort wissen, so oft du auch schon dort ein und aus gegangen bist. Aber du kannst vielleicht ein Erinnerungsbild der Schule zu Rate ziehen und daran die Fenster regelrecht zählen. Geht es schlecht so, so will ich dir noch ein anderes Hilfsmittel an die Hand geben. Du überlegst dir, wieviel Klassen nach vornheraus liegen und wieviel Fenster jede hat. Es ist das Verfahren von vorhin: Bei den neun in der Weise von Fig. 3 angeordneten Punkten konntest du ein Erinnerungsbild zur Hilfe nehmen – es handelte sich ja um eine dir sehr bekannte Anordnung von Punkten, wie sie sich etwa auf Dominosteinen findet. Auch im Falle des Gesellschaftsspieles nahmst du eine Überlegung zu Hilfe, ähnlich wie bei den Fenstern des Schulhauses.

Wir wollen sehen, was weiter nötig ist, wenn wir Gegenstände zählen wollen. Das Grunderfordernis ist, daß die Anzahl sich nicht etwa unterdessen ändert. Du wirst sagen, das ist doch selbstverständlich! Nicht ganz! Du kennst wohl die Geschichte vom Hirtenbüblein, das zum König gerufen wird, und ihm drei Fragen beantworten soll? Eine von ihnen ist die: Wieviel Wassertropfen sind im Meer? Das Büblein weiß sich sehr gut zu helfen. Es lehnt die Frage ab, weil sich diese Zahl dauernd ändert: „Verstopf erst alle Flüsse und Bäche, die sich ins Meer ergießen, dann will ich dir Antwort geben!"

Das waren bisher Forderungen, die wir an die zu zählenden Dinge stellen. Eine wichtige Forderung an den Zähler kommt hinzu, daß er nämlich zählen kann! Auch das ist nicht ganz so selbstverständlich! Kleine Kinder können es nicht; sie müssen schon ein gewisses Alter haben, ehe sie zwei und drei richtig anwenden. Mein Junge zählt trotz seiner drei Jahre 2, 4, 12, 7. Am meisten interessieren ihn 12 und 7. Da muß er nämlich ins Bett! – Und wie beim Kinde, so bei einigen Naturvölkern. Manche haben hinter dem Zahlnamen von vier nur noch einen Ausdruck für viel – so wird berichtet. Die Yancos am Amazonenstrom haben für 3 das Wort Poettarrarorincoaroac. „Gott sei Dank hört damit aber ihre Arithmetik auf," sagt dazu der, von dem ich diese Tatsache habe.

Auch bei dem erwachsenen Kulturmenschen gehört ein wenig Übung zum Zählen. Wir wollen es ja auch so weit bringen, daß wir schnell und deshalb mechanisch zählen. Solange wir, wie der Schulanfänger, nach jeder Zahl erst überlegen müssen, wie nun die nächste heißt, solange fehlt noch etwas. Beim mechanischen Zählen macht man aber leicht Fehler. Laß jemand zählen: 1090, 1091, 1092 usf., so kannst du fast 10 gegen 1 wetten, daß er auf 1099 die Zahl 2000 folgen läßt. Eine Quelle vieler Zählfehler ist die im Deutschen übliche, sehr unzweckmäßige Inversion der Einer und Zehner: Statt sechsundfünfzig sagten wir viel besser fünfzigsechs. Eine Änderung dieser unpraktischen Gewohnheit würde von allen Berufen, die viel mit Zahlen zu tun haben, freudig begrüßt werden. Weniger beim Zählen, wohl aber bei der mündlichen Mitteilung von Zahlen macht sich der geringe Lautunterschied von 2 und 3 unliebsam durch häufige Verwechslungen bemerkbar. Bei der Marine und ebenso bei der Artillerie hat man sich damit zu helfen gewußt, daß man grundsätzlich zwo statt zwei sagt.

Einer andern Schwierigkeit beim Zählen begegnet man, wenn die Dinge in sehr großen Abständen aufeinanderfolgen. Wie zählt der Kohlenträger, der einen Sack nach dem andern in den Keller trägt? Wie zählt der Schulbub die Tage, die ihn noch vom Weihnachtsfest trennen, wie der Soldat in Friedenszeiten die Tage, bis „Reserve Ruhe hat"? Daß in den letzten beiden Fällen rückwärts statt vorwärts gezählt

wird, ändert nichts Wesentliches an der Sachlage. — Nun sie alle können nicht die ganze Zeit über die Zahl im Kopf behalten. Also machen sie sich Zeichen. Der Kohlenträger setzt einen Strich neben den anderen, jedesmal wenn er einen Sack in den Keller trägt; der Junge und der Soldat streichen umgekehrt jeden Tag einen Strich weg. Man zählt dann die Zeichen, nicht die Dinge selber.

Wir haben nun schon soviel über das Zählen gesagt, wie mans in dem Falle macht und in jenem. Nun wollen wir endlich auch einmal selbst die Sache praktisch ausprobieren. Zähle die Streichhölzer in einer Schachtel! Fülle ein Wasserglas mit Erbsen und stelle deren Anzahl fest! Zähle die Buchstaben auf einer Seite dieses Buches! — Diese drei Beispiele lehren dich, es ist nicht ganz leicht, größere Zahlen wirklich sicher festzustellen. Du wirst sehr sorgfältig und zur Kontrolle mehrfach zählen müssen. Aus den drei Beispielen kannst du übrigens vielleicht schon schließen, daß man, um eine zehnfache Zahl wirklich genau auszuzählen, nicht nur die zehnfache Zeit braucht, sondern erheblich mehr. Man kann sich im Zählen üben. Der Bankbeamte, der Hundertmarkscheine, der Postbeamte, der Postkarten abzuzählen hat, ist geübter im Zählen dieser Dinge als andere Leute.

Man kann nun aber nicht alle Gegenstände, deren Anzahl man wissen möchte, wirklich abzählen. Die beste Zeit seines Lebens würde man mit diesem Zählgeschäft verlieren und doch manches überhaupt nicht zählen können. Das ist leicht bewiesen: Wenn jemand bei gewissenhaftem Zählen in der Sekunde um 1 weiterzählen kann, so kommt er in einer Minute bis 60, in einer Stunde bis 3600, an einem zehnstündigen „Arbeitstage“ also bis 36000. Und wenn er jährlich 300 Arbeitstage 50 Jahre lang mit dieser geistreichen Beschäftigung verbrächte, so käme er bis 540000000, also etwa bis zu einer halben Milliarde. Ein Milliardär käme also in seinem ganzen Leben nicht dazu, seine Dollarmenge zu zählen. Alles, was über diese Zahl hinausgeht — wir denken nur an die Kriegsanleihen — übersteigt die Arbeitskraft eines Einzelnen.

Es hat zuweilen Leute gegeben, die sich mit allerlei Zählungen in der Bibel beschäftigt haben. Es hat z. B. jemand

herausgefunden, daß die Bibel 31 173 Verse, 773 692 Worte, 5 566 480 Buchstaben zählt, daß „Jehovah“ 6855 mal, das Wort „und“ 46 227 mal vorkommt. Und dazu bemerkt er: „Drei Jahre hintereinander habe ich gebraucht, und zwar alle Tage acht Stunden, um dieses zu zählen.“

Wir schütteln den Kopf über diesen Mann, der so viel überflüssige Zeit hatte. Schon bei einigen Hunderten und Tausenden pflegen wir nicht mehr wirklich zu zählen. Hast du schon wirklich einmal von 1 bis 1000 gezählt? Wir werden gleich sehen, wie das Zählen durch das Rechnen ersetzt wird.

Hier wollen wir uns aber noch einen Augenblick mit dem Schätzen von Zahlen beschäftigen. Wenn zu irgend einer Kunst Übung gehört, dann zum Schätzen von Zahlengrößen. Wie weit man's bringen kann, zeigt der Schäfer, der gleich merken soll, wenn eines seiner hundert oder mehr Schafe fehlt, der Feldwebel, der bemerkt, wenn das Tempo beim Marsch falsch ist, wenn statt der 114 Schritte vielleicht 116 in der Minute gemacht werden. Natürlich handelt es sich in solchen Fällen nicht um eine allgemeine Fertigkeit im Schätzen; sie ist vielmehr einseitig auf gewisse Vorgänge und Dinge eingestellt, arbeitet da aber sehr genau.

Versuche zuerst selbst einmal Mengen zu schätzen! Es ist etwa auf dem Festplatz eine große Menschenmenge versammelt. Sind es 200 oder 1000 oder 5000? Oder es wird einer Gesellschaft ein Glas mit Erbsen gezeigt. Wer ihre Zahl am besten schätzt, gewinnt einen Preis. Es ist kaum zu glauben, wie weit die Schätzungen untereinander und vom wahren Wert abweichen.

Und doch verlangt man nicht selten von einem Menschen, daß er solchen Fragen nicht ratlos gegenüberstehe. Wenn der Beobachter vom Flugzeug aus nicht unterscheiden könnte, ob er da unten 250 Mann, also eine kriegsstarke Kompagnie, oder 1000 Mann, ein kriegsstarkes Bataillon, sieht, so jagte man ihn zum Teufel.

Es ist ein sehr lehrreiches Kapitel, wie man allmählich das Schätzen übt. Zunächst heißt es, wirkliche Mengen auszählen oder ausmessen. Dann muß der Schätzer sich gewisse Werte fest einprägen. Er muß also ein „Gefühl“ dafür bekommen, wieviel 100, 500, 1000 Mann sind, wieviel 100,

200, 300, 400, 500 Meter. Handelt es sich um Dinge, bei denen eine unmittelbare Zählung nicht ausführbar ist, dann muß er die Überlegung zu Hilfe nehmen; er muß mit Überschlagswerten rechnen. Ein Beispiel: Beim Beginn des Krieges sollten in einer Stadt, da die Milchzufuhr knapp wird, an alle Familien mit Kindern Milchkarten ausgegeben werden. Die Stadt zählt 50 000 Einwohner. Es werden für die Ausgabe der Milchkarten zwei Tage angesetzt, an jedem Tage 5 Stunden. Die Karten für die einzelnen Familien müssen ausgefüllt werden; dabei sind für die milchberechtigten Kinder die Geburtsscheine vorzuzeigen und die Milchhändler haben die Namen und Mengen in ihre Listen einzutragen. Als es zur Ausführung kommt, allgemeines Erstaunen, daß man die Menschenmenge nicht bewältigen kann! Stundenlanges, bei den meisten ergebnisloses Warten! Ein wenig Überlegung und Schätzung hätte da geholfen. Wenn jede Person zur Abfertigung auch nur 2 Minuten braucht, dann kommen in einer Stunde 30 Personen, in den zehn Stunden 300 Personen an die Reihe. Setzt man also bloß 5 Leute hin, die gleichzeitig arbeiten, so ist die Arbeit nicht zu bewältigen, wenn auch noch so schnell geschafft wird. Du kannst selbst leicht überschlagen, wieviel Schreibkräfte einzustellen waren.

Mit diesem Beispiel sind wir eigentlich schon einen Schritt über das Ziel dieses Abschnittes hinaus. Wir haben gerechnet und nicht gezählt. Ehe wir auf diesem Wege weiter gehen, müssen wir eine Frage aufnehmen, der wir vorhin aus dem Wege gingen. Wie können wir auch große Zahlen beherrschen, wie können wir Zahlenriesen meistern, die durch wirkliches Zählen praktisch garnicht erreichbar sind?

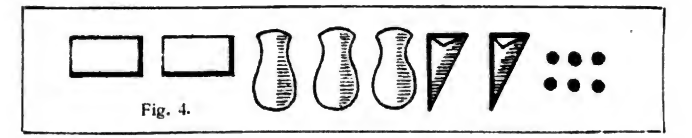
2. ZAHLSYSTEME

Wenn ich eine größere Anzahl von Dingen abzuzählen habe, tue ich gut, die Zählung mehrfach vorzunehmen. Handelt es sich um Bohnen oder Erbsen, werde ich freilich diese Sorgfalt für überflüssig halten; und wenn ich die Stufen zum Turm des Kölner Doms hinauf gezählt habe und dann herunterzu eine andere Zahl herausbekomme, werde ich es vorziehen, mich auf den Baedeker zu verlassen, und nicht die Wanderung noch einmal machen.

Bei wichtigen Dingen hingegen bin ich schon selbst besorgt genug, mehrmals zu zählen. Wenn der Geldbriefträger 832 Mark bringt, so zählt er mir das Geld auf, ich zähle mit; er zählt es nach, und ehe ich es nehme, zähle ich es wahrscheinlich noch einmal nach. Und auch jetzt wäre ich nicht sicher, wenn nicht die Zählung in einer ganz besonderen, übersichtlichen Weise vorgenommen würde. Ich will einmal annehmen, der Briefträger hat die 832 Mark in einzelnen Markstücken ausgezahlt – im allgemeinen wird das ja nicht zutreffen. Er wird dann jedenfalls nicht die Markstücke in regellosem Haufen aufeinanderlegen, sondern sie in gewisser übersichtlicher Weise gruppieren, etwa so, daß er sie in kleine Rollen von je 10 Stück abzählt, und von diesen je 10 in eine Reihe legt. Dann hat er mir 8 solcher Reihen, dazu noch 3 Rollen und noch 2 einzelne Markstücke auszuzahlen.

Damit haben wir ein Verfahren angewandt, das überall wiederkehrt, wo es sich um die Zählung größerer Mengen handelt. Der Fabrikant und der Großkaufmann verkaufen Waren, die in großen Zahlen in den Handel kommen, wie Stecknadeln, Knöpfe, Stahlfedern, nach Dutzenden, Gros und Schock. Der Kohlenträger, von dem wir vorhin (S. 5) sprachen, setzt auch nicht Strich neben Strich, er legt vielmehr jeden fünften Strich quer über die vorangehenden vier. Seine Zahl 13 sieht also so aus: 𝍸 𝍸 |||. Auch beim Abschätzen größerer Mengen benutzt man eine solche Gruppenbildung. Als Xerxes seine gewaltigen Heerscharen, die freilich die griechischen „Reuter"-Meldungen reichlich übertrieben haben, zählen wollte, ließ er ein Feld abstecken, das 10000 Mann dichtgedrängt aufnahm. Und nun wurde festgestellt, wie oft immer neue Truppen dieses Feld füllten.

Von allen Gruppierungen ist die wichtigste die, die uns schon durch die Bildung unserer Zahlen, durch ihre Schreibung und Aussprache nahegelegt wird. Wie jener Briefträger fassen wir zehn Gegenstände zu einem Zehner zusammen, zehn Zehner zu einem Hunderter und so fort. Diese Art der Zusammenfassung, die wir alle kennen, hat man früher im Rechenunterricht geradezu als eine Art Veranschaulichung größerer Zahlen genommen. So wird z. B. bei einem alten Rechenlehrer Busse, der um 1800 lebte, die Zahl 2326 in der Weise der Fig. 4 dargestellt: Zuletzt stehen 6 Einer, dann


Fig. 4.

folgen zwei Düten, die die Zehner darstellen, die drei Säckchen zeigen die Hunderter, die Rechtecke vorn sollen Kisten sein, die die Tausender wiedergeben.

Wie groß die Bedeutung dieses Zehnersystems für die Beherrschung großer Zahlen ist, kannst du dir z. B. an Ziffern klarmachen, die diesen Vorteil nicht ganz ausnutzen. Du hast sicher schon in einem Buche oder in einer Inschrift aus älterer Zeit eine in römischen Zeichen geschriebene Zahl entziffert. Du wirst diese Zahlen, z. B. MDCCLIX oder MCMDCCCLXXIV, nicht so schnell lesen wie etwa 1888 oder 1797, die du nun zur Übung auch einmal in römischen Ziffern schreiben magst. Du begreifst jetzt, warum die Römer und ebenso die Griechen, deren Ziffernsystem nicht weniger kompliziert war, keine großen Rechner waren.[1]) Schon das Lesen und Schreiben von Zahlenriesen mußte ihnen Mühe machen, erst recht das Rechnen mit ihnen.

Handelt es sich um sehr große Zahlen, so ist auch die einfache Aneinanderreihung von Ziffern für Lesen und Schreiben noch nicht sehr praktisch. Lies z. B. den folgenden Satz aus einem mathematischen Scherzbuch aus dem Jahre 1636, das sich „Mathematische Erquickstunden“ nennt: „Es haben die Astronomen gefunden und durch ihre Instrumente observirt, dass der inwendige Umbkreiss dess Firmaments halte 508781250 Meilen ... der Inhalt dess Firmaments hölen fläche 82364023748224431 9/11 gevierdte meilen.... So folget nun, dass der gantze Cörperliche Inhalt solcher Kugel nahe 3596299963139791266979190761957504 Cubicmeilen.“ Ich habe die alte Rechtschreibung nicht geändert, du wirst auch so verstehen, was gemeint ist. Aber, worauf es uns hier ankommt: Wirst du auch so ohne weiteres die Zahlenriesen, zumal den letzten, lesen können?

1) Näheres über römische, griechische und andere Ziffern im 1. Bändchen der Math. Bibl.: E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit. Leipzig, Teubner 1912.

Es ist bekannt, wie man die Schreibung solcher großen Zahlen übersichtlicher macht. Man faßt immer drei Ziffern zusammen, von rechts nach links beginnend. Man führt also noch eine Tausendergruppierung neben der Zehnergruppierung durch. Die Zahlen

508 781 250 Meilen
82 364 023 748 224 431 Quadratmeilen
3 596 299 963 139 791 266 979 190 761 957 504 Kubikmeilen

sind nun schon weit übersichtlicher. Allerdings gehört jetzt noch zum Lesen eine eingehende Bekanntschaft mit den Namen größerer Zahlen. Bis Tausend kennt sie schon der kleine Schulbub. Von da bis zur Million geht's auch noch an. Ich beherrsche damit alle Zahlen bis hin zur Zahl 999 999 999 999, in Worten Neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig. Die Zahl oben in der ersten Reihe heißt z. B., abgekürzt geschrieben, 508 Millionen 781 Tausend 250.

Eine Zahl, die wir häufig nennen, ist dabei übergangen worden, die Milliarde. Es ist das ein uns heute ganz geläufiges Wort für Tausend Millionen, das wir in Deutschland erst seit der Kriegsentschädigung der Franzosen im Jahre 1871 — sie betrug 4 Milliarden Mark — häufiger gebraucht haben.

Doch weiter in unserem Zahlensystem. Eine Million Millionen nennt man eine Billion. Die zweite der oben genannten Zahlen heißt z. B. 82 Tausend 364 Billionen 23 Tausend 748 Millionen 224 Tausend 431. Weiter nennt man dann eine Million Billionen eine Trillion, eine Million Trillionen eine Quadrillion usf. Die dritte unserer obigen Zahlen beginnt z. B. mit 3 Tausend 596 Quintillionen. Wie sie weiter lautet, magst du selbst lesen.

Wenn ich jetzt die Reihe der Namen Billion, Trillion, Quadrillion genügend weit fortsetze, kann ich jede Zahl, so groß sie auch sein mag, nicht nur schreiben, sondern auch lesen. Uns erscheint dieser Gedanke, daß das möglich ist, selbstverständlich. Das war aber nicht immer so. Der griechische Mathematiker Archimedes, wohl der bedeutendste Mathematiker des Altertums, hat eine in dieser Hinsicht sehr interessante Abhandlung verfaßt, die uns erhalten ist, die „Sand-

rechnung". Er stellt sich die Aufgabe, die Anzahl der Sandkörner anzugeben, die in eine Kugel von der Größe der ganzen Welt hineingehen. Was versteht Archimedes hier unter Weltall? Er belehrt den König Gelon, an den der Brief mit der Abhandlung über die Sandrechnung gerichtet ist, folgendermaßen[1]): „Nun weißt du, daß die meisten Astronomen mit 'Weltall' die Kugel bezeichnen, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde ist und deren Radius die Strecke zwischen dem Mittelpunkt der Sonne und dem Mittelpunkt der Erde ist. Das hast du aus den von den Astronomen geschriebenen Darlegungen gelernt. Aristarch von Samos hat nun ein aus gewissen Hypothesen bestehendes Buch herausgegeben, in dem die Annahmen zu dem Ergebnis führen, daß das Weltall vielemal so groß ist, wie das, das ich eben so genannt habe. Er setzt voraus, daß die Fixsterne und die Sonne unbeweglich seien, daß die Erde sich in einer Kreislinie um die Sonne bewege, die im Mittelpunkt der Bahn liege, und daß die Kugel der Fixsterne, um denselben Mittelpunkt wie die Sonne gelegen, so groß sei, daß der Kreis, den er sich von der Erde durchlaufen denkt, sich zu der Entfernung der Fixsterne verhält wie der Mittelpunkt der Kugel zu ihrer Oberfläche." Das letzte ist reichlich unverständlich; auch Archimedes meint das und versteht unter Weltall den Inhalt der Kugel, auf der nach der Ansicht der Griechen die Fixsterne angeheftet sind. Ich will dazu hier nur sagen, daß nach unseren heutigen Anschauungen Richtiges mit Falschem vermischt erscheint: Aristarchs Anschauung ist die gleiche, die zwei Jahrtausende später Kopernikus wieder zu Ehren gebracht hat. Nur angenähert richtig ist, daß die Bahn der Erde um die Sonne ein Kreis ist; falsch ist, daß die Fixsterne auf einer Art Kugel angeheftet sind. Damit fällt aber die ganze Aufgabe, die sich Archimedes gestellt hat, in sich zusammen. — Es kommt nun aber Archimedes gar nicht darauf an, die Zahl der Sandkörner, die seine eben beschriebene Welt anfüllen, wirklich genau anzugeben. Wichtig ist ihm vielmehr nur, daß man überhaupt Zahlen bilden kann, die jedenfalls größer als die doch gewiß ungeheuer

1) Der Wortlaut ist einer Archimedesverdeutschung von F. Kliem entnommen.

große Anzahl jener eingebildeten Sandkörnchen ist. Sein Problem ist nicht ein astronomisches, sondern ein zahlentheoretisches!

Er nimmt an, 10000 Sandkörner gehen auf ein Mohnkorn — das ist reichlich gerechnet; 40 Mohnkörner nebeneinander gelegt geben eine Fingerbreite.[1]) Wenn er dann den Halbmesser der Weltallkugel kennt, kann er leicht angeben, welche Zahl von Sandkörnern in ihr Platz hätte. Dazu gibt es Formeln, die Archimedes sehr gut kennt. Doch halt — so einfach wäre die Aufgabe nur, wenn bereits ein Zahlsystem da wäre, so wie wir es heute haben. Das aber mußte erst geschaffen werden. Und das ist der wahre Zweck der Arbeit von Archimedes!

Wir wollen ihm dabei nun ein wenig folgen. Die größte Zahl, für die die Griechen einen besonderen Namen hatten, war 10000. Sie nannten sie eine Myriade. Die Zahlen bis zu einer Myriade Myriaden (also bis $10000 \cdot 10000 = 100000000$) nannte Archimedes Zahlen erster Ordnung. Die Zahlen von da bis $100000000 \cdot 100000000$ heißen dann Zahlen zweiter Ordnung, die Zahlen von da bis $100000000 \cdot 100000000 \cdot 100000000$ Zahlen dritter Ordnung, und so geht das fort bis zu den Zahlen der 100000000ten oder myriad-myriadsten Ordnung. Diese Zahl, eine 1 mit 800000000 Nullen dahinter, wollen wir mit P bezeichnen. Archimedes nennt nun weiter die Zahlen von 1 bis P die Zahlen der ersten Periode. Jetzt läßt er die Zahlen bis 100000000 P die erste Ordnung der zweiten Periode bilden, dann kommt er zur zweiten Ordnung in der zweiten Periode, zur dritten und so fort bis zur 100000000ten Ordnung der zweiten Periode; da läßt er die dritte Periode beginnen. Nun kann man so eine vierte, fünfte Periode usf. angeben. Er geht bis zur 100000000ten, zur myriad-myriadsten Periode und findet schließlich in ihr als letzte Zahl: eine myriaden-myriade Einheiten der myriad-myriadsten Ordnung der myriad-myriad-

1) Es ist mir mitgeteilt worden, daß ein paar Schüler geduldig einige Kubikzentimeter schönen Mainsand wirklich gezählt und so die Grundannahme von Archimedes geprüft haben. Sie sind auf ganz andere Zahlen gekommen. Man muß die Arbeit von Archimedes besser „Staubrechnung“ nennen, so klein sind seine Körner.

sten Periode. Für den, der griechisch lesen kann, will ich diese Zahl auch noch in griechischen Lettern hersetzen: αἱ μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. Das ist in Ziffern geschrieben eine 1 mit 80000 Billionen Nullen hinterher. Fürwahr ein Zahlenriese, der alles Erfaßbare übersteigt! —

Archimedes hätte es, wenn ihn nicht die Aufstellung des Zahlsystems selbst gereizt hätte, gar nicht nötig gehabt, diesen gewaltigen Apparat von Zahlen in Bewegung zu setzen. Er kommt nämlich, um seine Frage zu beantworten, mit einer verhältnismäßig sehr kleinen Zahl aus. Er braucht gar nicht in die zweite Periode, geschweige denn eine höhere in seinem Zahlsystem zu steigen. Die Zahl der Staubkörner bleibt unter 10000000 Einheiten der achten Ordnung in der ersten Periode.

Wenn irgend etwas, so werden Überlegungen, wie sie eben Archimedes angestellt hat, uns zwingen, nach Veranschaulichungen Ausblick zu halten, die uns die Zahlenriesen wenigstens etwas näherbringen. Zuvor aber wollen wir noch einen Abstecher machen in ein anderes Gebiet.

3. ZÄHLMASCHINEN

Daß es Maschinen gibt, die das Zählen besorgen, wird dich zunächst in Erstaunen setzen. Dann aber fällt dir wohl ein, daß du manchen solchen Zählmaschinen schon begegnet bist. Wenn du die Gasuhr oder den Elektrizitätsmesser, die freilich meist in recht dunkle Ecken der Wohnung verbannt sind, genauer ansiehst, so wirst du an ihnen ein Zählwerk finden, das der Beamte des Gas- oder Elektrizitätswerkes in regelmäßigen Abständen nachsieht, um dann danach die Rechnung auszuschreiben. Du siehst dort etwa einen Apparat, wie ihn die Fig. 5 wiedergibt, ein Zeigerzählwerk, das hier gerade die Zahl 4820 anzeigt. Es ist der gleiche Gedanke wie bei der Uhr. Auch das Zeigerwerk deiner Taschenuhr ist ein Zählwerk. Nur wird nicht Gas oder Wasser oder Elektrizität, sondern die Zeit gezählt, und zwar in Sekunden von Mittag oder Mitternacht an. Drei Kreise sind nicht nebeneinander gesetzt, sondern der kleine Sekundenkreis liegt ganz in einem größeren Kreis, der gleichzeitig der Zählung

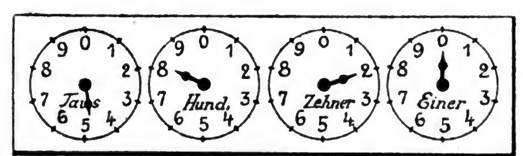
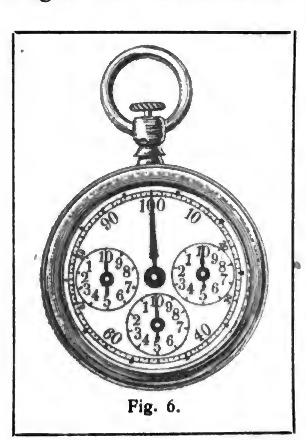


Fig. 5.

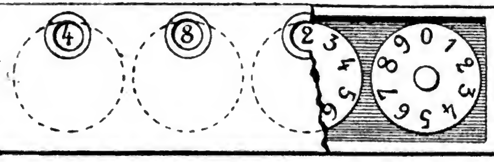
der Minuten — also der Sechzigfachen der Sekunden — und der Stunden — wieder der Sechzigfachen der Minuten — dient. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Zählwerk von Fig. 5 und einer Taschenuhr besteht darin, daß im ersten Falle das Zehnersystem angewandt ist, bei der Uhr nicht, natürlich nur deshalb, weil unsere Zeitzählung dieses System nicht benutzt.

Auch Zählwerke, die nach dem Zehnersystem gebaut sind, können die handliche Form der Taschenuhr haben. Fig. 6 zeigt z. B. einen Schrittmesser, deutsch „Pedometer“ genannt; er zählt die Schritte, die der Träger des Schrittmessers macht.

Für die Ablesung bequemer als Zeigerzählwerke sind Scheibenzählwerke, wie Fig. 7 eines zeigt. Das Schema läßt uns gleich den Bau erkennen. Von außen ist die Zahl, wieder 4820, in runden Löchern sichtbar. Hinter diesen bewegen sich Kreisscheiben, die am Rande die Ziffern von 0 bis 9 tragen. Sie sind in der Zeichnung auf der rechten Seite zu sehen; dort ist die Decke weggenommen. Hier dreht sich also nicht ein Zeiger, während der Ziffernkreis fest bleibt, sondern die Ablesungsstelle bleibt fest und darunter bewegen sich die Ziffern. Die Ziffernscheiben kann man auch durch Walzen ersetzen; dann sieht die Sache so aus, wie es Fig. 8 zeigt. Diese Anordnung ist praktischer als die vorhergehende. Die Zwischenräume zwischen den einzelnen Ziffern bleiben weg und die Ziffern selbst können größer gewählt werden. Scheiben- und


Fig. 6.

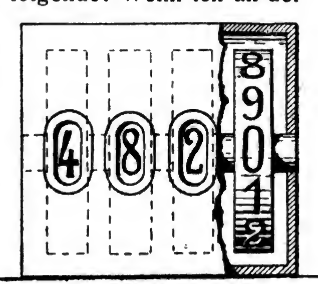
Walzenzählwerke kann man z. B. an Elektrizitätsmessern sehen.


Fig. 7.

Das Zählen geschieht nun, indem der letzte Zeiger, die letzte Rolle oder Scheibe, jedesmal um eine Stelle fortgerückt wird. Nur in seltenen Fällen stellt man vorher das Zählwerk auf 0 ein, so z. B. bei der Stoppuhr, die bei wissenschaftlichen und sportlichen Zeitmessungen viel benutzt wird. In der Regel läßt man das Zählwerk von der Zahl aus, auf der es gerade steht, weiterzählen und zieht dann diese Anfangszahl von der Endzahl ab. Die Differenz liefert die gesuchte Zahl. So kann man es auf allen Gas-, Wasser- und Elektrizitätsrechnungen sehen.

Wir wollen nun zunächst einmal annehmen, daß das Zählwerk nicht durch Wasser, Gas u. dgl., das durch das Werk fließt, bewegt wird, sondern mit der Hand. Fig. 9 zeigt eine solche Maschine. Mit einem Stift hantiert jemand an der Tausenderstelle. Um von außen das Zählwerk zu betätigen, müssen an den Scheiben oder Rollen Einkerbungen oder Vertiefungen angebracht sein — wir sehen das gleich noch besser. Mit Hilfe eines spitzen Gegenstandes lassen sich die Scheiben oder Rollen bewegen. Beim Zeigerwerk könnte man den Zeiger ohne weiteres drehen.

Nun ist bei allen solchen Zählwerken eine Frage von ganz besonderer Wichtigkeit die folgende: Wenn ich an der letzten Scheibe mit Hilfe eines Stiftes von der ursprünglich vorhandenen 0 bis zur 9 gedreht habe und drehe nun noch um eins weiter, so zeigt die Rolle wieder 0 an. Ich will aber doch 10 haben. Die 0 im Einer ist ganz richtig, es fehlt aber die 1 im Zehner. Die könnte ich ja nun so erreichen, daß ich jetzt die Zehnerrolle um 1


Fig. 8.

weiterdrehe. Das aber will man gerade vermeiden. Man will das Zählwerk so einrichten, daß das Vorwärtsdrehen nur an einer Stelle, etwa bei den Einern, geschieht. Das wird von der Zehnerübertragung geleistet. Die Fig. 10, die an ein Scheibenwerk anknüpft, soll uns das erläutern. Unter der Einerscheibe, die mitsamt dem Deckel entfernt ist, liegt ein Zahnrad mit zehn Zähnen. Einer der Zähne, der in der Figur schwarz gezeichnet ist (ein *f* steht daneben), ist nach oben etwas verdickt. Kommt er in die Lage, die die Figur gerade anzeigt, so bewegt er ein Zwischenrad *g*, das eine Kleinigkeit höher als das Einerzahnrad liegt, um einen Zahn vorwärts. Dieses greift wieder in das Zehnerrad ein und bewegt so das Zehnerrad um einen Zahn und damit um eine Zahl vorwärts. Es ist nun Sorge getragen, daß dieses verdickte Zähnchen der Einerscheibe gerade dann in Tätigkeit tritt, wenn die Zehnerübertragung notwendig ist, d. h. beim Übergang von 9 zu 0. Die Zehnerscheibe ist zur Hälfte mitgezeichnet. Man sieht auf ihr auch die Vertiefungen, die zum Bewegen der Scheiben angebracht sind. Wie beim Tausender, wo der Deckel gezeichnet ist, deutlich wird, kann die Drehung von außen durch einen Stift ausgeführt werden. Auch zwischen der Zehner- und Hunderterscheibe findet sich ein Zwischenzahnrad, das die Hunderterübertragung besorgt, ebenso, was in der Figur nicht mehr sichtbar, zwischen Hunderter und Tausender usf. Wenn z. B. die Zahl 99 dasteht, und ich den Einer um 1 weiterdrehe, so muß natürlich der Zehner mitgedreht werden, gleichzeitig aber, da wir von 9 Zehnern auf 0 kommen, auch der Hunderter.

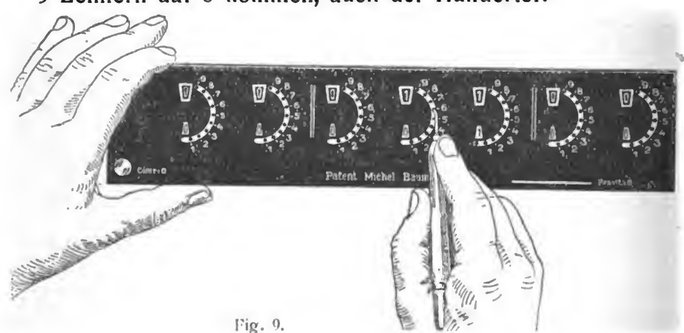


Fig. 9.

An der Fig. 10 läßt sich übrigens erkennen, wie man an einer solchen Maschine nicht bloß an den Einern, sondern auch an jeder anderen Stelle, bei den Zehnern oder Hundertern oder, wie gerade angedeutet, an den Tausendern weiterzählen kann. Damit wird aus der einfachen Zählmaschine eine Addiermaschine.[1])

Die Zählmaschinen haben große Verbreitung gefunden; ich will dich, nachdem ich vorher schon von Gas- und Wasseruhren und Elektrizitätsmessern gesprochen habe, nur daran erinnern, daß in jedem Taxameter ein Zählwerk ist. Der vom Wagen zurückgelegte Weg wird gemessen — man zählt natürlich die Anzahl der Radumdrehungen. Der Anzeiger weist dann allerdings nicht die Zahl dieser Umdrehungen oder der zurückgelegten Meter auf, sondern die Anzahl der Groschen, die man zu zahlen hat. Aber das ist nur eine praktische Umgestaltung des Ganzen. Solche Tourenzähler, Apparate also, die die Anzahl von Umdrehungen zählen, werden in der Technik häufig angewandt. Wenn du einmal nach München kommst und in das Deutsche Museum gehst, was ich dir dringend ans Herz lege, so siehst du beim Eintritt, wie die Zahl der Besucher durch ein Zählwerk festgestellt wird. Die Vierteldrehungen eines Drehkreuzes werden auf ein Zählwerk übertragen und du kannst selbst beobach-

1) Ich gehe hier nicht darauf ein. Eine ausführliche und leicht lesbare Darstellung findet man in einem Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“: K. Lenz, Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen (Leipzig 1915, Teubner). Diesem Büchlein sind einige unserer Figuren entnommen.

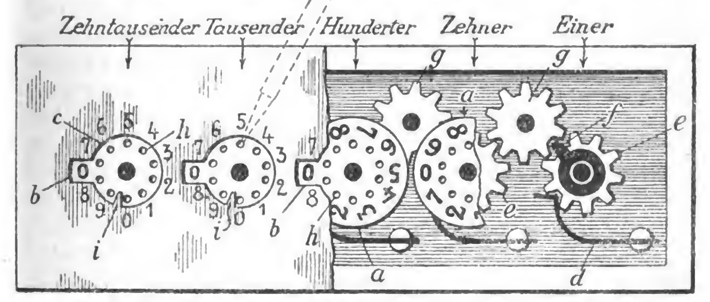


Fig. 10.

ten, wie die Zahl bei deinem Eintritt um 1 vorwärtsgeht; wenn du Glück hast, erwischst du vielleicht gerade eine Zehnerübertragung. Die gleiche Einrichtung ist bei vielen anderen Museen und Ausstellungen getroffen.

Wie ein Tourenzähler etwa eingerichtet sein kann, ersiehst du aus der Fig. 11. Es ist das ein Modell der Firma Max Kohl in Chemnitz. An eine Umdrehungsmaschine ist unten an der Drehachse ein Gewinde angebracht und von dort werden die Umdrehungen abgenommen. Ich will dir die Einzelheiten nicht erklären, du mußt sie selbst aus der Figur ablesen können.

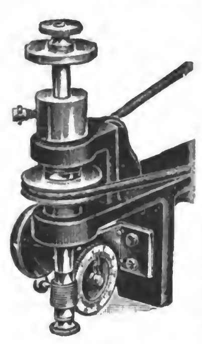


Fig. 11.

Noch von einer anderen Zähleinrichtung will ich dir kurz erzählen, wie sie häufig an Sirenen zu finden ist: Zwei Räder sitzen dicht nebeneinander auf der gleichen Achse. Das eine hat 100 Zähne, das andere 99. Das erste sitzt fest, das zweite lose. In beide greift die wie in Fig. 11 angebrachte unendliche Schraube. Wenn das erste Zahnrad mit 100 Zähnen eine ganze Umdrehung gemacht hat, ist das zweite auch um 100 Zähne vorgerückt, also um einen Zahn mehr als bei einer ganzen Umdrehung, es hat sich also gegenüber dem ersten Rad um einen Zahn vorwärts geschoben. Du wirst nun selbst überlegen können, wie hier die Zählung ausgeführt wird und welche Vorzüge sie besitzt.

Nicht nur Physiker und Techniker gebrauchen Zählmaschinen. Überall, wo viel gezählt wird, greift man zu ihnen. Der Mensch kann sich verzählen, die Maschine nicht. Zählfehler, wie wir sie früher (S. 4) kennen gelernt haben, gibt es für die Maschine nicht. Was aber noch wichtiger ist, sie kann ganz nach Bedarf langsam und schnell zählen. Wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit bei dem Apparat in Fig. 11 so groß ist, daß ein Mensch überhaupt nicht folgen kann, dann bewältigt die Maschine die Aufgabe glatt und richtig. Während der Mensch zum Abzählen großer Mengen Stunden und Tage brauchen würde, arbeitet die Maschine in einem Bruchteil dieser Zeit. So bedienen sich z. B. die Statistiker neuerdings in ausgedehntem Maße der Zählmaschinen. Die Ergebnisse,

sagen wir einmal einer Viehzählung, werden aus den Listen zunächst auf durchlochte Karten übertragen und diese werden dann mit der Zählmaschine gezählt. Auch das Geldzählen besorgt in den Münzstätten nicht der Beamte, sondern weit schneller und sorgfältiger als er eine Geldzählmaschine.

4. VERANSCHAULICHUNG GROSSER ZAHLEN DURCH ZEIT UND WEG

Uns sind bei unseren Überlegungen mehrfach Zahlenriesen begegnet, bei denen du im stillen gesagt haben wirst: „Das kann ich mir nicht vorstellen"! Du erinnerst dich, wie in Zeitungen, Büchern und Tabellen zuweilen große Zahlen durch Vergleiche irgend welcher Art begreiflich gemacht werden. In der Astronomie z. B., wo wir es fast durchweg mit Größen zu tun haben, die irdisches Maß weit überschreiten, wird in volkstümlichen Darstellungen fast regelmäßig zu solchen Veranschaulichungen gegriffen. Als jüngst die Kriegsanleihen aufgebracht wurden, waren die Zeitungen voll von Geschichten, die einen Begriff von den eingezahlten Summen geben sollten. Wir wollen zunächst die beiden üblichsten Veranschaulichungsmittel für größere Zahlen kennen lernen.

Du weißt aus der Schule, daß man die Zahlen, um sich von ihrer Aufeinanderfolge, ihrer gegenseitigen Größe und den Rechenoperationen mit ihnen ein Bild zu machen, in regelmäßigen Abständen an einen Strahl schreibt. Das sieht dann so aus (Fig. 12). Wir sprechen von einem Zahlenstrahl. Aus begreiflichen Gründen konnten wir nur einen Teil des Strahles zeichnen. Wir müssen uns ihn in Richtung des Pfeiles verlängert und dann immer weiter Zahlen in regelmäßigen Abständen angeschrieben denken. In unserer Zeichnung hat der Zahlstrahl links einen Anfangspunkt, an dem die Zahl 0 steht. Es kommt nun bei dieser Art der Darstellung vor allem auf die Länge der Einheitsstrecke an, also auf den Abstand des Punktes 1 von 0. Wählen wir als Einheitsstrecke 1 cm, so würde der Weg vom Anfangspunkt bis zur Zahl 7 die Länge 7 cm haben, bis zur Zahl 817 die Länge 8 m und 17 cm, die Zahl 233588 die Länge 2 km 335 m 88 cm. Von

0 1 2 3 4 5 6

Fig. 12.

den Millionen kann man sich auf diese Weise noch eine ganz gute Vorstellung machen. (Wie lang ist der Weg vom Anfangspunkt bis zur Zahl 1 000 000, wenn die Einheit 1 cm, wenn sie 1 mm ist?) Zahlen aber, die sich in die Billionen hinein erstrecken, sind auf diese Weise schlecht darstellbar; die Strecken werden zu lang. Für 1 Milliarde braucht man, wenn man 1 mm zur Einheit nimmt, schon eine Strecke von 1000 km. Um also z. B. eine Milliarde Mark zu veranschaulichen, die in Markstücken als eine einzige Rolle nebeneinandergelegt wird, braucht man, unter der Annahme, daß die Dicke eines Markstückes angenähert 1 mm ist, eine Rolle von 1000 km Länge.

Verwendet man diese Veranschaulichung von Geldsummen, so wird man übrigens nicht so rohe Angaben wie eben, sondern möglichst genaue Werte für die benutzte Einheitsstrecke zugrunde legen. (Verbessere unseren eben errechneten Näherungswert für die Darstellung einer Milliarde Mark! Nimm zur Darstellung von einer Milliarde Mark als Einheit den Durchmesser eines Markstückes; nimm als Einheit für 10 Mark die Dicke eines Zehnmarkstückes, als Einheit für 20 Mark die Dicke eines Zwanzigmarkstückes, als Einheit für 100 Mark die Dicke eines Hundertmarkscheines!)

Wir wollen noch einige andere Streckendarstellungen an ein paar Beispielen kennen lernen. Bekannt ist, wie man sich die Größe eines Armeekorps, das in Kriegsstärke etwa 30 000 Mann zählen wird, mit allem Gepäck und Kriegsmaterial versinnbildlicht: Es nimmt in Marschkolonne eine Strecke von angenähert 30 km, mit allem Train usw. sogar von 50 km ein. Nicht selten zieht man zur Veranschaulichung großer Mengen ihre Verladung in Eisenbahnzüge heran. Da hat jemand ausgerechnet, daß die Cheopspyramide bei Gizeh aus 2 678 257 Kubikmeter Gestein besteht. Die letzten Ziffern werden ja wohl nicht stimmen, vielleicht aber die ersten. Man findet leicht, daß das 7 231 294 Tonnen sind (die Tonne zählt 1000 kg). Man hat nämlich nur die erste Zahl mit dem Gewicht von einem Kubikmeter des bei der Pyramide benutzten Gesteins zu multiplizieren. (Auch gegen diese Multiplikation sind natürlich ähnliche Einwendungen zu machen wie eben.) Um nun dieses gewaltige Gewicht zu veranschaulichen, kalkuliert man, daß ein gewöhnlicher Güterwagen

10 Tonnen laden kann (die Lademenge ist an jedem Güterwagen angeschrieben!). Ein Zug mit 50 Wagen befördert also 500 Tonnen. So sind angenähert 15000 Güterzüge zum Herbeischaffen des Materials für die eine Pyramide nötig; wahrlich eine gewaltige Menge! So erst wird die Leistung jener alten Erbauer ins rechte Licht gerückt, die dieses Werk ohne die Hilfe moderner Maschinen aufgeführt haben.

Und nun noch ein Beispiel einer Streckendarstellung in recht drolliger Einkleidung. Die „Lustigen Blätter" veröffentlichten während des Krieges eine Reihe scherzhafter Briefe, die „Iwan, Kosack gefangenes" aus „Debberitz" an „Maruschka, Braut gelibbtes" schreibt. Maruschka hat ihrem Iwan auf einer Postkarte anderthalb Millionen Küsse geschickt, da macht er ihr in seiner drastischen Art klar, was anderthalb Millionen sind: „Andertchalb Milliunen! Wann du mir wirklich wolltezt kissen andertchalb Milliunen Mal in meinem Angesicht, müztezt du aufstehen jedden morgenz frieh um chalb vier Uhr formittax. Und wann man sich annimmt, daß du mir gibzt chundert Kisse in die Minutte, daß sein sich also tausend Kisse in die Stunde, und du würdezt fortkissen bis chalb eins Uhr nachts, dann müzte ich su alt werden wie daß sölige Metchuchsalim, biß du chättest ausgekißt. Oder wann du dich denkzt andertchalb Milliunen Menschen . . . alle an einander gelegt, immer die Fieß vun daß andre an daß Scheitel vun daß eine. Chast du dir gedenkt? Daß müzte werden ein su langes Spazirrweg, daß, wenn du willzt spazirren vun Anfang bis Schluß, und wenn du dir ableifst an Beine deiniges jedden Tag einen einzigen Millichmeter — dann chättest du sich längxt gar keine Bein mehr, wann du wärzt in die Mitte von daß Spazirrweg. Chast du jetzt begrifen? Daß ißt andertchalb Milliunen!" — Hast du begriffen? Dann sieh einmal zu, ob der Iwan ein guter Rechner ist.

Ein anderes vertrautes Veranschaulichungsmittel ist die Zeit. Wir wissen alle, was eine Sekunde, eine Minute, ein Tag, ein Jahr ist. Die älteren überblicken wohl einen Zeitraum von mehreren Jahrzehnten. Aber auch Jahrhunderte und Jahrtausende erscheinen übersehbar, wenn wir sie mit den Ereignissen der Geschichte angefüllt denken. So kommt es, daß man oft die Zeit heranzieht, wenn große Zahlen ver-

anschaulicht werden sollen. Um einen Begriff von dem Umfang der Erdkugel zu geben, pflegt man anzugeben, welche Zeit man zu einer Reise um die Erde braucht. In den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts war ein nach einem gleichnamigen Roman von Jules Verne bearbeitetes Theaterstück: „Die Reise um die Welt in 80 Tagen" in aller Munde. Wir brauchen heute erheblich weniger Zeit. Genauer aber wird die Überlegung, wenn wir ein in seiner Geschwindigkeit festgelegtes Beförderungsmittel voraussetzen, etwa einen D-Zug mit 75 km in der Stunde. Da die Länge des Kilometers so gewählt ist, daß der Erdumfang 40000 km zählt (ganz genau stimmt es nicht!), kannst du leicht selbst berechnen, wie lange die Reise mit dem D-Zug dauern würde, wenn sie ohne Aufenthalt vor sich ginge. Derartige Reisepläne werden auch für den Weltenraum gemacht. Wie lange würde eine Reise im D-Zug dauern, die uns zum Monde, zur Sonne führt? Da kommen nun schon recht beträchtliche Zahlen heraus. Der Mond ist, wenn er uns am nächsten steht, 357000 km entfernt; im D-Zug braucht man also etwa 200 Tage. Nach der Sonne, die 150000000 km entfernt ist, braucht der D-Zug gar 2000000 Stunden, oder, da das Jahr weniger als 10000 Stunden hat, mehr als 200 Jahre, weit mehr als ein Menschenalter. Da hat sich denn der Dichter Hebel in seinem „Schatzkästlein" ein anderes Beförderungsmittel ausgedacht; du kennst die Geschichte wohl schon: Ein Kanonier steht auf der Sonne und schießt eine Kanonenkugel ab, ausgerechnet auf dich. Du rennst erschreckt fort. Da tröstet dich der Dichter: du hast noch recht viel Zeit, ehe du auszurücken brauchst. Sehen wir einmal selbst zu. Die Anfangsgeschwindigkeit der modernen Geschosse wechselt in gewissen Grenzen. Nehmen wir an, der Kanonier hat eines genommen, das 750 m in der Sekunde zurücklegt. Wir setzen natürlich voraus, daß unsere Kugel mit unverminderter Geschwindigkeit weiterfliegt und immer in der gleichen Richtung. Der Weg, den sie zurücklegen soll, ist 150000000000 m. Das Geschoß braucht also 200 Millionen Sekunden. Der Tag hat 86400 Sekunden, der Flug dauert weit mehr als 2000 Tage, mehr als 6 Jahre. Du hast deshalb Zeit genug, dich in Sicherheit zu bringen.

Nun zählen Entfernungen wie die eben genannten im Him-

melsraum zu den ganz kleinen. So ist z. B. der Neptun, der äußerste bekannte Planet unserer Sonne, 30 mal so weit von der Sonne entfernt, wie die Erde. Diese dreißig Einheiten — ich kann ja die Entfernung von der Sonne zur Erde als Einheit für eine Streckendarstellung im Planetenraum annehmen — lesen sich recht einfach, aber nur deswegen, weil die gewählte Einheit selbst so groß ist. Wenn wir nun aber bis zum nächsten Fixstern gehen, so haben wir eine Reise von etwa 206000 Erdbahnhalbmessern vor uns. Das geht hoch in die Billionen Kilometer. Man ist gezwungen, abermals eine neue Einheit einzuführen, um doch nicht immer mit solchen Zahlenriesen zu operieren. Man rechnet nach Lichtjahren. In einer Sekunde legt das Licht einen Weg von 300000 km zurück. Von der Sonne bis zu uns braucht das Licht also etwa 8 Minuten (prüfe schnell den Wert!). Wie lang der Weg des Lichtes in einer Stunde, an einem Tage, in einem Jahre ist, kannst du auch feststellen; schwerlich aber wird es dir gelingen, eine rechte Vorstellung damit zu verbinden. Jedenfalls sind wir so zu einer neuen Einheit gekommen, in der gemessen die Fixsternentfernungen wieder ganz passabel aussehen, der nächste Fixstern ist z. B. — nur — 4 Lichtjahre von uns entfernt.

Wir sind eben schon zu Zahlenriesen gekommen, bei denen nur durch einen Kunstgriff der Anschein einer Veranschaulichung erweckt wurde: Wir nahmen den Maßstab so groß, daß wir uns scheinbar einigermaßen im Bereiche der kleinen Zahlen bewegten. Es gibt nun aber Zahlenriesen, bei denen auch ein solches Verfahren noch versagt. Die im Abschnitt 2 genannte Zahl P des Archimedes, erst recht seine größte Zahl, die 1 mit 80000 Billionen Nullen, würde allen solchen Bemühungen trotzen. Um die außerordentliche Größe wenigstens etwas deutlich zu machen, wollen wir nicht ihren Wert, sondern ihre Länge, wenn man sie in unserem Zahlsystem niedergeschrieben denkt, uns veranschaulichen. Nehmen wir an, auf den Raum von 1 cm kommen etwa 2 Ziffern. Wie lang ist dann die ganze Zahl? 40000 Billionen Zentimeter oder 400 Milliarden Kilometer, rechnest du aus, eine Strecke von etwa 3000 Erdbahnhalbmessern. Du wirst jetzt selbst einsehen, die Ausführung unserer vorschnellen Annahme, daß wir uns die Zahl hingeschrieben denken, stößt

auf Schwierigkeiten. Nimm an, es könnte jemand, die Erholungspausen eingeschlossen, 100 Nullen in der Minute schreiben. Dann brächte er, von Anbeginn unserer Zeitrechnung (es sind seitdem etwas über 1 Milliarde Minuten verflossen, vgl. darüber S. 26), eine Zehntel Billion zustande. Es hätten also 800000 Menschen von Christi Geburt an dauernd Nullen schreiben müssen! So nur käme man dazu, die Zahl, die Archimedes erdacht hatte, wirklich hinzuschreiben.

Wer voreilig ist, wird vielleicht sagen, alle diese Zahlen kann man ruhig als unendlich groß ansehen. Das Hirtenbüblein im Märchen begnügt sich damit, die Sterne, die es am Himmel sieht, und die Punkte auf einem Papierblatt, mit denen es ein Bild des Sternenhimmels zeichnen will, für unzählbar zu halten. Einen Astronomen, der so verfahren wollte, würde man mit Recht schelten. Man weiß schon sehr lange, wieviel mit dem unbewaffneten Auge sichtbare Sterne am Himmel es gibt, insgesamt gegen 5000; die Sichtbarkeitsgrenze ist natürlich für die einzelnen Augen je nach der Sehschärfe und den atmosphärischen Verhältnissen verschieden. Alle diese Sterne sind genau aufgezeichnet und noch weit mehr, die uns nur durch das Fernrohr zugänglich sind. – Etwas anders ist es schon mit dem anderen Gleichnis von der Unendlichkeit. An einem Berge aus Diamant wetzt alle 1000 Jahre ein Vögelchen seinen Schnabel. Und wenn der demantene Berg weggewetzt ist, dann ist eine Sekunde der Ewigkeit um. Eine Sekunde! Aber wieviel solcher Sekunden hat die Ewigkeit? Das vergißt das Hirtenbüblein zu sagen. – – Auch diese Sekunde der Ewigkeit ist endlich, kann durch eine endliche Zahl in unseren Sekunden wiedergegeben werden. – So oft führen wir das Wort unendlich im Munde und meinen doch, gemessen an den endlichen Zahlen, wie sie z. B. Archimedes erdacht, Zwerge von Zahlen. Eine unendliche Farbenpracht, eine unendliche Fülle der Gedanken, der Ereignisse strömt auf den Menschen ein, umgibt ihn aller Orten. So sagen wir. Und doch! Die Zahl aller Gedanken, die je gedacht worden sind, ist endlich. Denn zu jedem Gedanken braucht man Zeit und so kann jeder Mensch in seinem endlichen Leben nur endlich viel Gedanken denken. Und da die Zahl der Menschen, alle Altvorderen mit eingerechnet, auch endlich ist, ist auch

die Anzahl aller Gedanken endlich. Und mit den Sinneseindrücken, den Tönen und Farben, ist es genau so.

Es gehört eigentlich zu den Welträtseln, daß trotz dieser Atmosphäre des Endlichen, die den Menschen überall umgibt, in ihm die Idee des Unendlichen entstehen konnte!

5. ETWAS VOM RECHNEN MIT GROSSEN ZAHLEN

In der Schule lernst du, daß das Addieren eine Abkürzung des Weiterzählens ist. 7 + 3 heißt, es soll von 7 aus um 3 weitergezählt werden, also 8, 9, 10. Tatsächlich erledigt man nicht selten Additionen kleiner Zahlen durch Weiterzählen. Mancher Rechner wird z. B. in der Aufgabe 1 die Zehner addieren, indem er zählt: **1**, 2, **3**, **4**, 5, **6**, 7, 8, **9**, **10**, 11, **12**, 13, **14**, **15**. Die fetten Zahlen, die er etwas betont, geben die Teilergebnisse an. – Wie das Addieren ein Abkürzen des Weiterzählens, so ist das Subtrahieren ein Abkürzen des Rückwärtszählens. Das Multiplizieren ist dann wieder eine Abkürzung des Addierens gleicher Summanden. In der Aufgabe 2 wirst du z. B. die Fünfen der letzten Stelle einfach zählen und schließen 7 · 5 = 35. Das Dividieren schließlich ist eine Abkürzung einer mehrmaligen Subtraktion. – Man kann die Erklärung der Rechenarten auch anders geben; unsere Fassung ist auch nur für ganze Zahlen berechnet. Aber ich will hier ja kein Rechenbuch schreiben.

Aufg. 1.	Aufg. 2.
0,10 M.	0,15 M.
0,20	0,25
0,25	0,95
0,15	0,20
0,30	0,35
0,20	0,85
0,10	1,20
0,05	0,75
0,20	1,05
1,55 M.	5,75 M.

Wir wollen nun zunächst einmal den Nachdruck auf das Wort ‚Abkürzung' legen. Es ist ja klar, wenn ich die Aufgabe 7388 + 5149 wirklich in der Weise rechnen wollte, daß ich von 7388 um 5149 weiterzählte, so würde das recht langweilig werden, und obendrein liefe ich Gefahr, mich zu verzählen. Ich muß nämlich ziemlich genau aufpassen, da ich, näher betrachtet, zwei Zählungen gleichzeitig vornehme. Wenn es sich gar um noch größere Zahlen handelte, um Millionen und Billionen, dann würde ich, wie unsere früheren Überlegungen zeigen, Jahre brauchen und oft doch nicht fertig werden. Es gibt da eine nette Geschichte: Karlchen bekommt in der Schule die Aufgabe: Wie oft kann man 3

von einer Million abziehen? Er setzt sich zur gewohnten Stunde an die Arbeit. Nur langsam kommt er vorwärts. Da greift Mutter ein und hilft. Und als Vater von der Arbeit heimkommt, hilft auch er. Die Geschwister, Onkel und Tanten werden mobil gemacht, sie arbeiten, bis ihnen die Augen vor Müdigkeit zufallen – und dann schimpfen sie am nächsten Tag auf den unvernünftigen Lehrer, der solche Aufgaben kleinen Kindern stellt!

Ein Hamburger Mathematiker, H. Schubert, hat einmal ausgerechnet, daß am 29. April 1902 um 10 Uhr 40 Minuten gerade eine Milliarde Minuten seit dem Beginn unserer Zeitrechnung verflossen war. Es ist das ein sehr gutes (von uns schon benutztes) Beispiel zur Veranschaulichung der Zahl 1000000000. Der „Kladderadatsch" macht nun bei der Meldung davon die sehr geistreiche Bemerkung: „Wieviel Tausende von Minuten muß dieser Gelehrte zu verlieren haben?" Er scheint zu glauben, daß es sich um das Ergebnis langwieriger Zählungen und Berechnungen handelt. Er ist im gleichen Irrtum wie die brave Familie von eben: Dividiert man eine Milliarde durch die Anzahl der Minuten eines Jahres, und wertet den Rest aus, so hat man das gewünschte Ergebnis.[1]) Worauf es Schubert überhaupt ankam, einen anschaulichen Begriff von der Größe einer Milliarde zu geben, das hat jener Spötter im Witzblatt nicht verstanden.

Ich will nun hier nicht weiter auf die vier Grundrechenarten mit großen Zahlen eingehen. Du wirst keine Schwierigkeiten haben, solche Rechnungen auszuführen, wenn sie auch Zeit und Sorgfalt erfordern. In der Praxis greift man vielfach zu besonderen Rechenmitteln, deren wichtigstes die Rechenmaschinen sind. Wir hatten schon früher gesehen, daß sich Zählmaschinen sehr einfach zu Additions- und natürlich auch Subtraktionsmaschinen ausbauen lassen. Daneben gibt es zahlreiche Arten von Multiplikationsmaschinen; willst du Genaueres darüber wissen, so greife zu dem S. 17 genannten Büchlein. Ich muß es mir hier leider versagen, darauf einzugehen; dazu brauchte es mehr Platz, als zur Verfügung ist.

---

1) Natürlich mußte er auch die Schaltjahre u. dgl. noch berücksichtigen. Schubert hat übrigens, wie ich nachträglich von W. Ahrens erfahre, an den Kladderadatsch geschrieben und gesagt, er habe nur 15 Minuten zu der Berechnung gebraucht.

Nicht selten kann man außerdem verhältnismäßig kompliziert erscheinende Rechnungen, die schnell auf große Zahlen führen, durch Überlegung sehr einfach gestalten. Dafür will ich wenigstens ein Beispiel geben. Wieder eine Geschichte, diesmal aus der Kindheit des großen Mathematikers Carl Friedrich Gauß.[1]) Er besuchte in seiner Jugend die Katharinenschule in Braunschweig. Der Lehrer stellte einmal, um einen Teil der hundert Schüler verschiedensten Alters zu beschäftigen, die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Kaum hat er das getan, als schon der kleine Gauß vorkommt, die Tafel auf den Tisch des Lehrers legt: „Ligget se!“ Der Lehrer denkt wie üblich an die wenig ruhmvolle Wahl zwischen Dummheit und Faulheit. Und doch ist das Ergebnis richtig: Der kleine Mathematikus hat überlegt, daß 1 und 100, 2 und 99, 3 und 98 usf. jedesmal 101 gibt. Da 50 solcher Paare vorhanden sind, erhält er als Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$.

Man sieht leicht, daß man das nicht bloß mit Zahlenreihen so machen kann, die mit 1 beginnen, sondern auch dann, wenn sie mit irgendeiner anderen Zahl anfangen. Auch braucht es sich nicht immer um aufeinanderfolgende Zahlen zu handeln. Ich stelle z. B. die Aufgabe, die ungeraden Zahlen von 1001 bis 1999 zu addieren. Ich erhalte 250 Paare, deren jedes die Summe 3000 hat; das Ergebnis ist also 750000. Das Verfahren führt immer zum Ziel, wenn die Zahlen eine sogenannte arithmetische Reihe bilden, d. h. wenn eine Zahl der Reihe immer um den gleichen Wert größer ist als die vorhergehende. (Berechne z. B. die Summe der geraden Zahlen von 1200 bis 1500!)

Wir sprachen bisher von der genauen Durchführung von Rechnungen mit großen Zahlen. Weit häufiger sind im praktischen Leben Überschlagsrechnungen. Man begnügt sich mit einer Annäherung, die auf drei, vier oder fünf Stellen richtig ist. Manchmal wird man bei einer solchen Näherungsrechnung schon zufrieden sein, wenn man nur eine erste Stelle oder gar nur ihren Stellenwert übersieht, wenn man, wie man sagt, die Größenordnung richtig bestimmen kann. Auch hierauf will ich nicht ausführlich eingehen, das würde

1) Die Erzählung findet sich auch in W. Ahrens, Mathematiker-Anekdoten. (18. Bändchen der Math.-phys. Bibl.) Leipzig 1915, Teubner.

ein Bändchen für sich erfordern, ein Beispiel mag genügen. Denke dir um den Äquator der Erde einen Strick gelegt. Wenn er straff angezogen wird, bleibt noch ein Ende von 10 m übrig. Dieses Ende soll man dazu benutzen, den Strick überall ein wenig zu lockern. Die Frage ist: kann zwischen Erde und dem also gelockerten Strick eine Fliege durchkriechen oder nicht? Du wirst zunächst nach dem Gefühl die Frage kräftig verneinen. Der Überschuß von 10 m auf den ganzen Äquator (es waren ja, wie wir S. 22 hörten, 40000000 m) verteilt, wird nur einen ganz verschwindend kleinen Betrag ergeben. Sehen wir genauer zu. Der Abstand des gelockerten Strickes habe die uns unbekannte Größe x. Der Erdumfang ist nach einer Formel, die du wohl kennst — andernfalls mußt du sie mir glauben — $2\pi R$, wo R für den Erdhalbmesser steht und π die Zahl ist, die das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser angibt, ihr Wert ist ungefähr $3\frac{1}{7}$ (vgl. S. 49). Der Radius des größeren Kreises, der dem Strick zukommt, ist $R + x$, sein Umfang also $2\pi(R + x)$. Die Differenz beider Kreisumfänge ist also $2\pi(R + x) - 2\pi R$, das ist aber $2\pi x$. Andererseits sind das unsere 10 m. Da 2π eine Kleinigkeit mehr als 6 ist, ergibt sich x ungefähr zu $1\frac{1}{2}$ m. Du siehst, du hast dich ganz gewaltig geirrt, und dein Zahlenvorstellungsvermögen, das dich vorschnell zu der Antwort „Nein“ drängte, hat dich betrogen. — Ich will dir das Problem in einer etwas anderen Form vorlegen, dann wirst du weit eher auf ein richtiges Ergebnis kommen. Ein Mensch geht auf dem Äquator um die Erde (praktisch ist das natürlich nicht ausführbar). Um wieviel ist der Weg, den der Kopf zurücklegt, größer als der, den die Füße zurücklegen. Mache dir zunächst klar, daß es sich hier im Grunde um die gleiche Aufgabe handelt wie oben, nur ist jetzt die vorhin gesuchte Größe x gegeben und die dort gegebene Größe 10 m gesucht. Es ist jetzt wohl klar, daß der Kopf nicht einige Tausend Meter mehr zurücklegen wird, als die Beine. Denke auch daran, daß ein Kragen, dessen Weite nur um eine Nummer zu groß ist, rings um den Hals erstaunlich weit absteht, obwohl der Unterschied im Umfang nur einen Zentimeter beträgt. (Wie stände es mit dem Ergebnis der beiden Aufgaben, wenn der Versuch statt auf dem Äquator der Erde auf dem der Sonne ausgeführt würde?)

Eben haben wir noch gerechnet, wenn auch überall mit Abschätzung. Nun noch ein Beispiel, bei dem es nur auf die Größenordnung der Zahlen ankommt. Man erzählt — ob es wahr ist, weiß ich nicht — daß jemand dem großen Philosophen Kant, als er noch ein Knabe war, die Frage vorgelegt habe, ob wohl in dem großen Walde, durch den man gerade ging, zwei Bäume zu finden wären, die die gleiche Zahl von Blättern haben. Man könnte auch etwa fragen, ob wohl in der Welt zwei Menschen herumlaufen, die gleichviel Haare auf dem Kopfe haben. Um die Antwort zu geben, braucht man durchaus nicht die Blätter auf all den Bäumen, die Haare auf all den Köpfen zu zählen. Es genügt zu wissen, wie groß die Höchstzahl der Blätter eines Baumes, die Höchstzahl der Haare auf dem Kopfe eines Menschen ist, beides natürlich auch nicht genau, sondern nur der Größenordnung nach. Da z. B. die Anzahl der Haare auf dem Kopfe eines Menschen etwa 200000 betragen soll, kann man sicher sein, daß unter 200001 Menschen mindestens zwei die gleiche Anzahl Haare ihr eigen nennen. Nur diese einzige Überschlagsbestimmung genügt, um die obige Frage zu beantworten. Bei der Frage nach den Bäumen versuche nun selbst die Antwort zu geben, du mußt allerdings eine Überschlagszahl für die Blätter an den Bäumen und für die Bäume in einem großen Walde haben. Eins will ich dir sagen. Man rechnet auf einen ausgewachsenen Baum bei der Eiche 2000000 Blätter, bei der Kiefer 10000000 Nadeln. Das andere mußt du selbst bestimmen.

6. DIE GRÖSSTE ZAHL, DIE MIT DREI ZIFFERN GESCHRIEBEN WERDEN KANN

Du hast gewiß schon von der Geschichte gehört, wie der Erfinder des Schachspiels sich als Belohnung die Summe von Weizenkörnern ausbat, die herauskommt, wenn man auf das erste Feld eines Schachbrettes 1 Korn legt, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das vierte 8 usf., immer auf ein Feld doppelt so viel wie auf das vorhergehende. Das sieht recht bescheiden aus, und auch der König, dem diese Bitte vorgetragen wurde, ahnte nicht, um welche gewaltige Menge es sich handelte. Auf dem letzten Felde liegt eine Anzahl von

Weizenkörnern, die durch ein Produkt aus 63 Faktoren 2 dargestellt wird. Diese Schreibweise ist recht langweilig. Man kürzt das 2^{63} ab und liest 2 hoch 63. Den Faktor, um den es sich handelt, hier 2, nennt man die Basis, die Anzahl der Faktoren, hier also 63, nennt man den Exponenten. Das Ganze heißt eine Potenz. Man kann so in einfacher Weise recht hohe Zahlen darstellen. Ich will hier als Beispiel eine Tabelle einschalten, die die ersten vierzig Potenzen von 2 umfaßt:

Tabelle der Potenzen von 2.

Exp.	Potenz	Exp.	Potenz
1	2	21	2 097 152
2	4	22	4 194 304
3	8	23	8 388 608
4	16	24	16 777 216
5	32	25	33 554 432
6	64	26	67 108 864
7	128	27	134 217 728
8	256	28	268 435 456
9	512	29	536 870 912
10	1 024	30	1 073 741 824
11	2 048	31	2 147 483 648
12	4 096	32	4 294 967 296
13	8 192	33	8 589 934 592
14	16 384	34	17 179 869 184
15	32 768	35	34 359 738 368
16	65 536	36	68 719 476 736
17	131 072	37	137 438 953 472
18	262 144	38	274 877 906 944
19	524 288	39	549 755 813 888
20	1 048 576	40	1 099 511 627 776

Jetzt wirst du, obwohl diese Tabelle nicht bis zur 63. Potenz geht, leicht beantworten können, wieviel Weizenkörner auf dem letzten Felde liegen, du brauchst nur die 40. Potenz mit der 23. zu multiplizieren.

Für das rasche Anwachsen der Potenzen mit steigenden Exponenten gibt schon das Altertum ergötzliche Beispiele.

In dem ältesten Rechenbuche, das wir kennen (ein gewisser Ahmes hat es 1700 v. Chr. geschrieben), steht folgende Aufgabe: 7 Personen besitzen 7 Katzen, jede Katze frißt 7 Mäuse, jede Maus frißt 7 Ähren Gerste, aus jeder Gerstenähre können 7 Maß Getreide entstehen. Wieviel Maß Getreide sind das insgesamt? In Potenzform geschrieben ist die Zahl 7^5. Du wirst sie selbst ausrechnen können.

Nun eine schöne Geschichte, die dir zunächst zeigen wird, daß man vorsichtig im Überlegen sein muß, die uns dann aber auf die Bedeutung des Potenzbegriffes für die Lebewelt führen wird. Jeder Mensch hat 2 Eltern, 4 Großeltern, 8 Urgroßeltern usf. Geht man 40 Generationen zurück, also etwa 1200 Jahre, so hat jeder Mensch 2^{40} oder nach unserer Tabelle 1099511627776 Vorfahren. Also ist es falsch, daß damals, etwa zur Zeit Karls des Großen, weniger Leute lebten als heute; im Gegenteil: jedem Menschen von heute entsprechen in jenen Zeiten mehr als eine Billion Leute, es gab also eine Billion mal so viel Menschen damals als heute. Stimmt's?

Du wirst den Trugschluß schnell gefunden haben. Aber kehren wir den Spieß um. Es gibt Spaltpilze, Bakterien, die unter günstigen Bedingungen so schnell heranwachsen, daß sie sich nach zwei Stunden schon wieder in zwei Teile teilen. Jeder Teil vermehrt sich in gleicher Weise. Nach 24 Stunden sind also aus einem Spaltpilz schon 2^{12}, nach zwei Tagen 2^{24} Spaltpilze geworden. Das Anwachsen der Zahl wird nun schnell immer gewaltiger. Es gehört gar nicht viel Rechnung dazu, an Hand unserer Tabelle auf S. 30 zu bestimmen, wie lange es dauern würde, bis soviel Bakterien durch fortgesetzte Spaltung entstanden wären, daß sie trotz ihrer Kleinheit in regelmäßiger Schicht die ganze Erde überdecken würden. — Auch bei sehr langsamer Vermehrung einer Tierart würde doch in verhältnismäßig kurzer Zeit ein Landgebiet geradezu überflutet werden, wenn nicht eben andere Tierarten ebenso eine Vermehrung zeigten und der gegenseitige Kampf ums Dasein bald Schranken aufrichtete. — Fehlen einmal für eine Zeit diese Hemmungen, dann beobachten wir ungeheure Vermehrungen. Von den Verheerungen der Heuschreckenschwärme, die beim Anflug die Sonne verdunkeln, der Raupenzüge, die dicht an dicht gewaltige Flächen bedecken, hast du sicher gehört, und die

verderbliche Ausbreitung von Epidemien ist auch nur durch die ins Riesenhafte gewachsene Anzahl gewisser Bazillen zu erklären.

Du bist vielleicht schon einmal einem Problem begegnet, das auf den ersten Blick mit unserem Potenzbegriff nichts zu tun zu haben scheint: Auf welche Summe wäre ein Pfennig angewachsen, wenn man ihn zu Christi Geburt auf Zinsen gelegt hätte? Hättest du ihn auf eine Sparkasse getragen, wie wir sie heute überall haben, so hätte er keinen Pfennig Zinsen gebracht. Pfennige verzinst man da nicht, nur volle Mark. Wir wollen ihn aber doch verzinsen. Dann bringt er jährlich zu 5% $\frac{5}{100}$ Pfennig, also in 1916 Jahren $\frac{5}{100}$ Pf. · 1916 oder 95,80 M. Mehr dürfte der Einleger oder seine Erben nach dem Bürgerlichen Gesetzbuch nicht verlangen, denn das gestattet dem Privatmann nur einfache Zinsen. Ganz anders aber, wenn Zinseszinsen zugelassen werden, wenn mit anderen Worten die Zinsen jährlich zum Kapital geschlagen und nun schon im nächsten Jahre mit verzinst werden. So machen es z. B. die Sparkassen. Du wirst sagen: Nun wenn Zinseszinsen zugelassen werden, dann wird es eine Kleinigkeit mehr werden als eben. Sehen wir zu! Am Ende des ersten Jahres haben wir 1 Pf. + 0,05 Pf. = 1,05 Pf. Die Zinsen im zweiten Jahr betragen 1,05 Pf. · 0,05. Das im zweiten Jahr zu verzinsende Kapital ist also 1,05 Pf. + 1,05 Pf. · 0,05, d. h. 1,05 (1 + 0,05) Pf. oder $1{,}05^2$ Pf. Das ist das im dritten Jahre zu verzinsende Kapital. Mit den Zinsen wächst es, wie man ebenso sieht, mit dem Ende dieses Jahres auf $1{,}05^3$ Pf. an, nach vier Jahren auf $1{,}05^4$ Pf., nach 1915 Jahren auf $1{,}05^{1915}$ Pf. Du siehst jetzt, daß wir es mit einer Aufgabe der Potenzrechnung zu tun haben. Wenn es schon schwer war, die Potenzen von 2 auszurechnen, auch nur bis zur vierzigsten, so erst recht, wenn es sich um so hohe Potenzen von 1,05 handelt. Man benutzt für solche Zwecke Logarithmen. Wir wollen dieses nützliche, aber nicht in zwei Zeilen zu erklärende Hilfsmittel hier nicht anwenden, vielmehr auf andere Weise uns einen ungefähren Überschlag über das Ergebnis verschaffen. Wir stellen leicht fest, daß schon $1{,}05^{14}$ größer als 2 ist. Der auf Zinseszins gelegte Pfennig verdoppelt sich also nach etwas weniger als 14 Jahren. Nehmen wir näherungsweise an, nach 14 Jahren. Dann sind

also nach 28 Jahren aus dem Pfennige schon 4, nach $3 \cdot 14$ oder 42 Jahren schon 8 Pfennig geworden. Nun ist $1915 : 14 = 136$ Rest 11. Heute ist also der Pfennig jedenfalls auf mehr als 2^{136} Pfennige angewachsen. Das ist ganz außerordentlich viel mehr, als wenn wir den Pfennig auf einfache Zinsen legen. Zehn Milliarden Mark sind 1 Billion Pfennige. Das sind, wie ein Blick auf die Tabelle auf S. 30 lehrt, etwa 2^{40} Pfennige. Jene Summe ist aber noch 2^{96} mal so groß. Es handelt sich also hier um Summen, die alle auf Erden vorhandenen Geldsummen weit überschreiten. Man könnte etwa ausrechnen, wie groß eine Goldkugel sein müßte, deren Wert dieser Summe gleich käme. Du magst selbst mit einer Veranschaulichung dieser Summe einen Versuch machen. — Jetzt wird dir vielleicht auch eine kleine Rechnung begreiflich: Um die 1871 zu erlegende Kriegsentschädigung zu erhalten, hätte Frankreich im Jahre 1413 einen Franken auf Zinseszins legen sollen. Rechne einmal nach, ob es stimmt!

Die Antwort auf die Frage, die unsere Überschrift stellt, wird nach dem, was wir bisher erfahren haben, nicht lauten 999, wie du vielleicht vorschnell gedacht hast, sondern wahrscheinlich 9^{99}, denn wenn ich die Wahl habe zwischen 99^9 und 9^{99}, so ist sofort einzusehen, daß die letztere Zahl weit größer ist als die erste.

Und doch bin ich mit dieser Antwort noch nicht zufrieden. Die Zahl 9^9 ist jedenfalls größer als 99, ihr Wert läßt sich durch wirkliches Ausrechnen genau bestimmen; jedenfalls wird sie etwa neun Ziffern haben, also größer als 100000000 sein. Es ist also ganz klar, daß ich eine weit größere mit drei Ziffern geschriebene Zahl als eben erhalte, wenn ich 9 in die 9^9te Potenz erhebe. Ich werde das 9^{9^9} schreiben können. Genauer wäre die Schreibweise $9^{(9^9)}$, damit nicht eine Verwechslung mit $(9^9)^9$ eintritt. Diese zuletzt genannte Zahl bedeutet ein Produkt aus 9 Faktoren, deren jeder wieder aus neun Faktoren 9 besteht. Insgesamt handelt es sich also um ein Produkt aus $9 \cdot 9$ oder 81 Faktoren 9. Diese Zahl ist also kleiner als die vorhin erwähnte Potenz 9^{99}.

Ich will dir noch einiges von der Zahl 9^{9^9} erzählen. Ich habe diese Ergebnisse freilich nicht selbst gefunden, sie vielmehr zum Teil einer amerikanischen Zeitschrift entnommen. Ob alles richtig ist, habe ich nicht nachgeprüft. Die Zahl

9^{9^9} hat 369693100, also etwa eine drittel Milliarde Ziffern, sie beginnt mit den Ziffern 428124773175747048036987115, die letzten beiden Ziffern sind 89. Was dazwischen liegt, ist unbekannt. Wenn man die Zahl einigermaßen lesbar auf einen Streifen Papier druckte, so hätte er eine Länge von 1200 bis 1800 km. Druckt man die Zahl hingegen in Bücher, etwa so, daß auf die Seite 14000 Ziffern gehen, so brauchte man bei einem Umfang von 800 Seiten 33 Bände.

7. VON PRIMZAHLEN UND VOLLKOMMENEN ZAHLEN

Manche Zahlen lassen sich in Faktoren zerlegen, z. B. $6 = 2 \cdot 3$ und $18 = 2 \cdot 3^2$, andere nicht. Dabei ist von der selbstverständlichen Zerlegung einer Zahl in ein Produkt aus 1 und der Zahl selbst abgesehen. Zahlen, die wie 2, 3, 5, 7, 11, 13 usf. nicht zerlegbar sind, nennt man Primzahlen. Wenn man die Reihe der Primzahlen aufschreibt, so wird man finden, daß sie immer seltener werden, mit anderen Worten, im Intervall von 1 bis 100 finden sich mehr Primzahlen als im Intervall von 101 bis 200 usf. Da war die Frage berechtigt: hören die Primzahlen vielleicht irgend wo auf, gibt es eine letzte, größte Primzahl? Schon der griechische Mathematiker Euklid hat den Nachweis erbracht, daß es eine solche letzte Primzahl nicht gibt. Nehmen wir einmal an, es wäre doch eine solche Primzahl vorhanden, sie heiße p. Dann bilde ich das Produkt aus allen Primzahlen von 2, 3, 5 usf. bis hin zu p. Wenn schon p gewiß eine große Zahl sein wird, so erst recht dieses Produkt. Es ist nur gut, daß wir es nicht wirklich auszurechnen brauchen. Ich kann es so bezeichnen: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$, wo die Punkte alle dazwischenliegenden Primzahlen andeuten. Zu diesem Produkt addiere ich jetzt die Zahl 1. Ich behaupte, diese neue Zahl ist durch keine der bisher vorhandenen Primzahlen bis einschließlich p teilbar. Man überzeugt sich in der Tat leicht, daß bei der Division durch jede dieser Primzahlen der Rest 1 bleibt. Dividiere ich z. B. durch 2, so ist ja das lange Produkt durch 2 teilbar, nicht aber der hinzugefügte Summand 1. Es bleibt also der Rest 1. Ebenso geht es mit der Division durch 3, durch 5 usf. bis p. So bleibt nichts anderes übrig, als daß diese neue Zahl entweder selbst eine Primzahl ist, die dann natürlich

größer als p ist, oder daß sie andernfalls in Primzahlen zerlegbar ist, die aber sämtlich größer als p sind. In beiden Fällen also haben wir Primzahlen gewonnen, die größer als p sind. Unsere vorher gemachte Annahme, p sei die größte Primzahl, war nicht stichhaltig, es gibt überhaupt keine größte Primzahl; die Anzahl der Primzahlen ist unendlich groß.

Nicht alle Probleme, die sich an die Primzahlen knüpfen, lassen sich so rasch erledigen. Ja es gibt sogar nicht wenige, die überhaupt noch nicht beantwortet sind. Wir kennen Paare von Primzahlen, die sich nur um 2 unterscheiden, 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31 usf. Ein englischer Mathematiker, Glaisher, hat durch unmittelbares Auszählen festgestellt, daß es zwischen 1 und 100000 insgesamt 1125 solcher Paare gibt, zwischen 1000000 und 1100000 aber nur 725, zwischen 8000000 und 8100000 gar nur 518. Es werden also immer weniger. Hören die Paare nun einmal ganz auf, gibt es also ein letztes, größtes, oder aber ist ihre Anzahl unendlich? Die Antwort auf diese Frage ist heute noch nicht gefunden.

Wie in dieser, so tappt man in anderen Fragen über die Primzahlen im Dunkeln. Man hat versucht, dadurch hinter die Geheimnisse der Primzahlen zu kommen, daß man sie möglichst weit aufsuchte. So sind Tabellen entstanden, die die Primzahlen und die Zerlegungen größerer Zahlen in Primfaktoren enthalten. Natürlich verzichtet man, um diese Tabellen nicht allzu umfangreich zu machen, auf die leicht erkennbaren Vielfachen, z. B. von 2, 3, 5 usf. Man gibt auch nur immer den kleinsten Teiler einer zerlegbaren Zahl an; durch Division durch diesen Teiler kommt man auf eine neue Zahl, die man nun erneut in der Tabelle aufsucht, um dort nachzusehen, ob sie weiter zerlegbar ist oder nicht. Schon im Anfang des 19. Jahrhunderts gab es Tafeln, die bis 3000000 reichten (von J. Chr. Burckhardt). Auf Veranlassung von Gauß hat dann ein Hamburger Rechenkünstler, Zacharias Dahse, Tafeln von 6000000 bis 8000000 berechnet, die später von Rosenberg vervollständigt und bis 9000000 veröffentlicht worden sind. Der oben schon erwähnte Engländer Glaisher hat die Lücke von 3000000 bis 6000000 ausgefüllt. Darüber hinaus sind Tafeln nicht gedruckt. In den Archiven der Wiener Akademie der Wissenschaften befinden

sich aber Manuskripte von J. Ph. Kulik, die bis zu der Zahl 100 000 000 reichen. Das liest sich sehr einfach. Was für eine Unsumme von Arbeit aber dahinter steckt, davon kannst du dir einen Begriff machen, wenn du einmal überlegst, wieviel Divisionen nur bei einer einzigen größeren Zahl probeweise gemacht werden mußten.

In einzelnen Fällen ist man mit der Entscheidung über die Zerlegbarkeit von Zahlen weit über die größte Zahl der zuletzt erwähnten Tabelle hinaus. In der Geometrie spielen die Zahlen $2^{2^n}+1$ eine Rolle. Setze ich $n=1$, so erhalte ich 5; für $n=2$ erhält man 17, für $n=3$ schon 257 und für $n=4$ gar 65537, wie du leicht auf unserer Tabelle auf S. 30 ablesen kannst. Nun hat Gauß gezeigt, daß man ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seitenzahl ausgerechnet eine Zahl von der Form $2^{2^n}+1$ ist, mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Er ist der erste gewesen, der das 17-eck konstruiert hat. Mit dem Fall des 257-ecks hat sich der Mathematiker Richelot beschäftigt und sogar an den Fall des 65537-ecks hat sich ein Schüler Richelots herangetraut, der spätere Realgymnasialdirektor Hermes. Gauß hatte seine für das 17-eck angestellten Betrachtungen auf dem Raum einer Schiefertafel unterbringen können, die er seinem Studienfreunde Wolfgang Bolyai geschenkt hat — der hat sie bis in sein Alter als wertvolles Erinnerungszeichen aufbewahrt. Die Abhandlung von Richelot zählt schon 80 Seiten. Das Manuskript der Rechnungen von Hermes schließlich, an dem dieser 10 Jahre gearbeitet hat, füllt einen geräumigen Handkoffer, der im Mathematischen Institut der Göttinger Universität aufbewahrt wird. Übrigens waren diese Arbeiten insofern überflüssig, als Gauß das ganze Problem bereits für den allgemeinsten Fall erledigt hatte.

Nun ist es eine interessante Frage, ob die Zahlen, die man so erhält, Primzahlen sind oder nicht. Der bekannte Mathematiker und Jurist Fermat bejahte die Frage. Ein gewisser Landry, der (1867) alle Zahlen 2^n+1 und 2^n-1 bis hin zu $n=64$ auf ihre Zerlegbarkeit hin untersucht hat (er überschritt damit erheblich die Grenze der früher erwähnten Tabellen), hat durch Gegenbeispiele gezeigt, daß Fermat sich geirrt hat. So ist z. B. $2^{32}+1$, eine der Gaußschen Zahlen ($n=5$), durch 641 teilbar. Die größte Zahl, die als Primzahl

wirklich nachgewiesen ist, gehört zur Reihe dieser Zahlen, es ist

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951.$$

Nebenbei bemerkt war die schlimmste Zahl, die Landry zu bewältigen hatte, $2^{58} + 1$. Die letzte Zahl, die bei der Zerlegung noch weiter zu untersuchen war, hieß 57646075230342349. Landry hielt sie erst für eine Primzahl, bis sich herausstellte, daß sie in das Produkt zweier neunzifferiger Zahlen zerfällt. Das mag einen Begriff davon geben, welche Schwierigkeiten die Zerlegung mancher Zahlen machte.

Doch zurück zu unseren Zahlen $2^{2^n} + 1$. Auch hier entsteht nun, nachdem sich die Annahme von Fermat als falsch erwiesen hat, die Frage: gibt es in der Reihe dieser Zahlen unendlich viele Primzahlen oder nur endlich viele? Wenn ja, welche ist von ihnen die größte? Die Antwort ist bis heute nicht gefunden. Man hat sich damit begnügen müssen, die Zahlen selbst zu untersuchen. Für $n = 5$ erhält man, wie oben schon erwähnt, die zerlegbare Zahl

$$4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Die Zahl, die man für $n = 6$ erhält, hat 274177 zum kleinsten Teiler. Weiter kennt man Teiler der Zahlen, die zu $n = 12$, 23 und 36 gehören. $2^{2^{36}}$ hat mehr als 20 Milliarden Ziffern und hat zum kleinsten Teiler die Zahl 2748779069441. Selbstverständlich hat man diese Riesenzahl selbst und deshalb auch ihren noch immer reichlich langen Teiler nicht auf dem üblichen Wege mit Multiplikation und Teilungsversuchen ausgerechnet.

Wirklich rechnerisch durchgeführt ist jüngst eine Riesen-Zahlenrechnung von dem Schüler eines Berliner Gymnasiums. Es war bewiesen worden durch zahlentheoretische Betrachtungen, daß $2^{364} - 1$ durch 1093^2 teilbar ist – diese Tatsache steht in Beziehung zu dem bekannten Fermatschen Problem. Der Schüler hat nun diese Rechnung wirklich durchgeführt – es handelt sich um die Division einer 110-stelligen Zahl, deren Ergebnis eine 104-stellige Zahl ist – natürlich ergab sich, daß die Division in der Tat restlos aufging.

Die Zahl 6 hat die merkwürdige Eigenschaft, daß die Summe aller ihrer Teiler gleich der Zahl selbst ist. Es ist in der Tat

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Dabei ist also, wie wir noch ausdrücklich hinzufügen müssen, die Zahl 1 als Teiler mitgezählt, nicht aber die Zahl selbst. Die nächste Zahl, bei der wir die gleiche Eigenschaft beobachten, ist 28. Es ist

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Solche Zahlen nennt man vollkommene Zahlen. Das Altertum kannte noch zwei weitere vollkommene Zahlen, 496 und 8128. (Untersuche, ob das stimmt!) Die nächste vollkommene Zahl ist 33550336; sie findet sich zuerst in einem Münchner Manuskript aus dem Jahre 1461. Dann fand man, noch im 16. Jahrhundert, drei weitere vollkommene Zahlen, 8589869056, 137438691328 und 2305843008139952128. Erst am Ende des 19. Jahrhunderts fügten zwei Mathematiker (P. Seelhoff und J. Pervušin) eine neunte vollkommene Zahl hinzu. Dieser Zahlenriese heißt:

$$2\,658\,455\,991\,569\,831\,744\,654\,692\,615\,953\,842\,176.$$

Man kennt bisher nur gerade vollkommene Zahlen; ob es auch ungerade gibt, weiß man nicht. Die geraden enden alle auf 6 oder 8, das hat man bewiesen. Wieviel vollkommene Zahlen es gibt, ob ihre Anzahl endlich oder unendlich ist, weiß man wieder nicht.

8. NOCH EINIGE BEISPIELE VON ZAHLENRIESEN

Die Frage nach den Riesen im Zahlenreiche hat im Laufe unserer Untersuchungen eine neue Gestalt angenommen. Wir wissen jetzt: es ist gar kein Kunststück, große Zahlen zu finden, es ist nur nötig, eine Art von Rechenoperation zu haben (und möglichst auch eine einfache Schreibweise dafür), bei der das Anwachsen beim Zunehmen der darin auftretenden Zahlen recht schnell ist. Beim Zählen ging's langsam vorwärts, beim Addieren schneller, beim Multiplizieren noch schneller, am schnellsten beim Potenzieren. Ich kann darauf weiterbauend eine neue Rechenoperation definieren, bei der es noch ungleich rascher geht. Wie ich als Abkürzung von $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ den Ausdruck 2^6 eingeführt habe, so kann ich für 2^{2^2}, für $2^{2^{2^2}}$ usf. irgend eine Schreibweise einführen, etwa ${}_3[2]$, ${}_4[2]$. Die Zahl ${}_3[2]$ bedeutet nur erst 16, ${}_4[2]$ hat bereits den Wert 65536, wie wir unserer Tabelle

auf S. 30 entnehmen. Die Zahl $_5[2]$ hätte den Wert 2^{65536}; das ist eine Zahl von ganz gewaltiger Ausdehnung. Du kannst einmal versuchen, dir von ihrer ungefähren Länge Rechenschaft zu geben. Nun nimm an, ich hätte die gleiche Rechenoperation etwa mit 3 oder mit 9 ausgeführt, dann wäre das Ansteigen noch gewaltiger. Die Zahl $_3[9] = 9^{9^9}$ hatten wir im vorigen Abschnitt näher behandelt. Was gäbe das erst für eine Zahl, wenn wir 9 in diese 9^{9^9}te Potenz erheben würden. Und doch sind wir mit $_4[9]$ erst auf der vierten Sprosse dieser Rechenoperation angelangt.

Man hat diese Rechenart nicht näher verfolgt. Sie führt rasch zu so großen Zahlen, daß sie für die Arithmetik keine Bedeutung hat; für etwa vorkommende kleinere Ausdrücke kommt man ja mit der gewöhnlichen Potenzschreibweise aus.

Ein anderes Rechensymbol, das gleichfalls sehr schnell auf große Zahlen führt, hat mehr Beziehung zur Wirklichkeit. Zunächst ein paar ganz einfache Dinge: ich habe zwei Gegenstände, etwa einen Punkt · und einen Strich —. Auf wieviel verschiedene Weisen kann ich die beiden Gegenstände in einer Linie aufeinander folgen lassen. Nun natürlich auf zwei Weisen. Entweder · — oder — ·. Bei drei Gegenständen ist die Anordnung schon mannigfaltiger. Nehme ich ein Messer, eine Gabel und einen Löffel, dann habe ich insgesamt sechs Anordnungen:

Messer—Gabel—Löffel Messer—Löffel—Gabel
Gabel—Messer—Löffel Gabel—Löffel—Messer
Löffel—Messer—Gabel Löffel—Gabel—Messer,

mehr sind nicht möglich. Kommt ein vierter Gegenstand dazu, etwa ein Bleistift, so kann ich ihn an jeder dieser sechs Stellungen an vier Stellen einschalten, vor jeden der drei Gegenstände und hinter den letzten. Jede der sechs Stellungen liefert also vier neue Anordnungen. Ich erhalte für die Anordnung von vier Gegenständen $6 \cdot 4$ Möglichkeiten, die alle verschieden sind. Du wirst jetzt verstehen, warum man auch die 6, die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten bei drei Gegenständen, in $2 \cdot 3$ auflöst. Kommt noch ein fünfter Gegenstand dazu, so erhalte ich $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ Anordnungsmöglichkeiten usf. Man führt zur Abkürzung der Produkte das Zeichen ! (gelesen Fakultät) ein und schreibt also:

3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040, ... Du siehst, wie schnell die Ergebnisse dieser Rechenart wachsen.

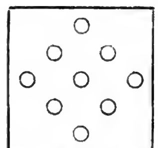
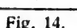
Es gibt ein Spiel Bozz puzzle, das 1878 ein Amerikaner erfunden haben soll, und das eine Zeitlang sehr beliebt war. Man hat ein in 16 kleine Quadrate geteiltes größeres Quadrat und 15 Steine von der Größe der kleinen Quadrate; sie stehen in der Grundstellung so, wie es Fig. 13 angibt. Das sechzehnte Feld ist frei. Die Aufgabe besteht darin, von irgend einer anderen Stellung aus zu dieser Grundstellung zu kommen. Die Änderung einer Stellung in die nächstfolgende darf nur in der Weise erfolgen, daß ein Stein in ein freistehendes Nachbarfeld geschoben wird. Ich frage hier nur: Wieviel Ausgangsstellungen gibt es? Die Antwort ist mit unseren neuen Rechensymbolen leicht geschrieben: 16!. Die Ausrechnung dieser Zahl geht allerdings nicht ganz so schnell; es sind 1 307 674 365 000, also weit über eine Billion verschiedene Spiele. Du kannst dir selbst deutlich machen, wieviel Zeit etwa nötig wäre, alle diese Spiele durchzuspielen.

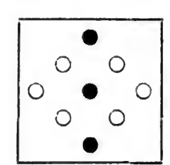
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

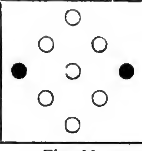
Fig. 13.

Ein anderes Beispiel liegt dir vielleicht näher. Wieviel seid ihr in eurer Klasse? Sagen wir 36. Wieviel verschiedene Rangordnungen sind da möglich? Antwort 36!. Aber nun rechne einmal diese Zahl aus!

Die nachfolgende Untersuchung wird uns auf eine schon bekannte Rechenart führen. Du kennst das Kegelspiel. Die neun Kegel werden auf einem Feld aufgestellt, das Fig. 14 andeutet. Irgendwelche auf diesem Brett stehenden Kegel bilden ein „Bild“. Das Bild in Fig. 15 (die vollen Kreise bedeuten Kegel, die andern leere Felder) heißt z. B. hier zulande eine „Schnurgasse“. Die Namen für die einzelnen Bilder, soweit es solche überhaupt gibt, sind in den verschiedenen Gegenden Deutschlands verschieden. Fallen alle Kegel, so hat man „die Vollen“ oder „alle Neun“. Steht nur der König in der Mitte, so hat man einen „Kranz“, d. i. ein Wurf, der meist höher als „alle Neun“ gewertet wird. Steht der einzelne Kegel auf dem äußersten Felde rechts, so steht „der rechte Eckbauer“ usf.



Fig. 14.


Fig. 15.


Fig. 16.

Es gibt neun Gruppen von Bildern. Die erste Gruppe bilden die Bilder, die aus nur einem Kegel bestehen, die zweite diejenigen, die aus zweien bestehen usf. Die erste Gruppe zählt offenbar neun verschiedene Bilder. Wieviel Bilder zählt nun die zweite Gruppe? Ich nehme zunächst einen Kegel und stelle ihn irgendwohin. Dann bleiben für den zweiten Kegel noch 8 Felder frei. Ich erhalte also 8 Bilder. Nun kann ich dem ersten Kegel 9 solcher Stellungen geben; immer bleiben 8 Felder zu beliebiger Besetzung frei. Es gibt also 8 · 9 Bilder der zweiten Gruppe. Doch halt! Der Schluß ist vorschnell. Ich habe auf diese Weise jedes Bild zweimal erhalten. In der Tat kann ich ja z. B. das in Fig. 16 dargestellte Bild so bekommen, daß ich erst den rechten, dann den linken Kegel aufstelle; ich kann es aber auch umgekehrt machen. Und so in jedem der 72 Fälle. Es gibt also nur 72 : 2 = 36 verschiedene Bilder der zweiten Gruppe.

Nun kommen die Bilder aus drei Kegeln. Ich will sie aus der Anzahl der Bilder aus zwei Kegeln ableiten. Ich setze irgend eines der Bilder aus der Zweiergruppe auf. Dann bleiben 7 Felder frei. Auf diese 7 Felder kann ich den dritten Kegel nach Belieben setzen. Es gibt also 36 · 7 Bilder der Dreiergruppe. Wieder aber müssen wir Obacht geben, ob nicht Bilder mehrfach auftreten. Und das ist in der Tat der Fall. Nehme ich z. B. die Schnurgasse in Fig. 15. Sie kann durch Hinzufügen eines dritten Kegels aus drei ganz verschiedenen Bildern der Zweiergruppe entstanden sein. Entweder können nämlich die beiden vordersten oder die beiden hintersten oder der vorderste und der hinterste Kegel zu Anfang dagestanden haben. Ich muß also die erhaltene Zahl 36 · 7 noch durch 3 dividieren. Das geht nun so weiter, wenn ich von der Dreiergruppe zur Vierergruppe übergehe. Wieder gibt es eigentlich 6 mal so viel Bilder, da der vierte Kegel bei jedem Bilde auf 6 Felder gestellt werden kann. Jedes

so enstehende Viererbild kann aber aus vier verschiedenen Dreierbildern entstanden sein, ich habe also noch durch 4 zu dividieren. Gehe ich zu den Fünferbildern über, so habe ich die Anzahl der Viererbilder mit 5 zu multiplizieren, gleichzeitig aber durch 5 zu dividieren und so geht das fort. In der folgenden Liste ist die Entstehungsweise der einzelnen Zahlen dadurch angedeutet, daß ich zunächst die Multiplikationen und Divisionen unausgeführt gelassen habe:

Einer-Gruppe	9	$= 9$
Zweier-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$	$= 36$
Dreier-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$= 84$
Vierer-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$= 126$
Fünfer-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$	$= 126$
Sechser-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$	$= 84$
Siebener-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$	$= 36$
Achter-Gruppe	$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$	$= 9$

Das sind zusammen 510 Bilder. Mit den beiden Bildern, die ich erhalte, wenn alle stehen und wenn kein Kegel steht, habe ich 512 Bilder. Das sind gerade 2^9. Ob das wohl Zufall ist?

Es läßt sich aus unserer kleinen Tabelle noch mancherlei Merkwürdiges herauslesen, das eine oder andere fällt dir vielleicht selbst auf. Du siehst jedenfalls, daß die Anzahl der Bilder weit größer ist, als du erst angenommen hast. Würde es sich um ein ähnliches Spiel mit 10 Feldern handeln, so wäre, wenn unsere Vermutung richtig, die Anzahl der möglichen Bilder 1024, bei 12 Feldern 4056 usf.

Ich könnte noch eine ganze Reihe ähnlicher Untersuchungen anknüpfen. Soweit sie sich auf bekannte Spiele beziehen, wird darüber gelegentlich in den Zeitungen berichtet, z. B. wieviel verschiedene Spiele bei irgend einem Kartenspiel, etwa dem beliebten Skat, möglich sind, wieviel verschiedene Stellungen beim Schach usf. Dahin gehört auch, um auf ein anderes Gebiet überzugreifen, wieviel verschiedene Melodien man aus den sieben Tönen einer Oktave zusammenstellen kann. Immer kommt man auf ganz gewaltige Zahlen; im letz-

ten Fall wird die Anzahl besonders groß, wenn man auch Wiederholungen der Töne bis zu einem gewissen Grade gestattet.

Ich will mit einer Geschichte schließen, die Kurd Laßwitz erdacht hat; sie findet sich in einem Bändchen von Erzählungen, das er „Traumkristalle" nennt. Du kannst sie ausführlich bei ihm selbst nachlesen, auch die Rechnung führe ich dir nicht vor, nur die Aufgabe und ihre Lösung: Man will eine Bücherei anlegen, die alles, was man wissen kann, wirklich alles umfassen soll, eine Universalbibliothek. Es sollen Bände von 500 Seiten werden, die Seite zu 40 Zeilen mit je 50 Buchstaben. Denn das ist klar, irgendwie drucken muß sich all diese Weisheit doch lassen, drucken in unseren Buchstaben, mit besonderen Lettern für die Zeichen , ; : usf. und noch einigen anderen, den Ziffern u. dgl. Mehr als hundert Typen wird der Setzer jedenfalls nicht nötig haben. Man braucht nun nur alle möglichen Stellungen dieser verschiedenen Drucktypen auszuprobieren und neben allerlei Unsinn und dummem Zeug wird sich dann auch alles Gescheite in diesen Bänden finden. Die Anzahl der Bände dieser Universalbibliothek ist „nur" $10^{2000000}$. Die Bände seien alle 2 cm dick und wie in einer Bücherei nebeneinander aufgestellt und das Licht mit seinen 300000 km in der Sekunde gleite an ihnen vorbei; wieviel Lichtjahre, meinst du wohl, brauchte es zu seiner Reise? Ich kann dir verraten, was Laßwitz ausgerechnet hat. Die Anzahl der Lichtjahre ist eine 1 mit 1999982 Nullen hinterher. Und diese Anzahl Lichtjahre ist wohl ebenso unanschaulich wie vorher die Bandzahl!

9. ZAHLENZWERGE

Bisher hatten wir uns auf die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . beschränkt. Die kleinste unter ihnen ist 1. Kleiner ist noch, wenn man sie als Zahl anerkennt, 0. Das ist überhaupt die kleinste Zahl, die es gibt, denn weniger als nichts kann es nicht geben — meint der Laie, bis der Mathematiker kommt und ihm sagt: man kann auch Schulden machen, und das Thermometer kann auch unter Null fallen. Doch von den negativen Zahlen, die er da im Sinne hat, wollen wir hier nicht sprechen.

Die Berechtigung, von Zahlenzwergen zu reden, bekommen wir, wenn wir neben den natürlichen Zahlen auch die Brüche in den Kreis unserer Betrachtung ziehen. Die Frage nach den Zahlenzwergen ist eigentlich mit der nach den Zahlenriesen erledigt. Ist nämlich n irgendein Zahlenriese, so ist $\frac{1}{n}$ ein Zahlenzwerg. Der großen Zahl 1000000 entspricht die kleine, zu ihr „reziproke" Zahl $\frac{1}{1\,000\,000}$. In der Tat, je mehr der Nenner eines Bruches bei gleichbleibendem Zähler wächst, um so kleiner wird der Wert des Bruches, um so mehr nähert er sich der Zahl 0.

Wir wollen gleich dazu übergehen, einige solcher kleinen Zahlen aufzusuchen. Seinerzeit hatten wir Zeit und Weg als geeignete Mittel kennengelernt, große, wenn auch nicht übergroße Zahlen zu veranschaulichen. Hier wollen wir nun gleich etwas über kleine Zeiten und kleine Wege hören und uns einen Begriff von ihnen zu machen suchen.

Eine Sekunde ist eine reichlich kleine Zeiteinheit. Im Kino werden uns, wie du wohl weißt, Einzelbilder in rascher Folge vorgeführt. Ein erstes Bild wird ruckweis im Apparat an die Stelle gebracht, von der aus es projiziert wird, dann wird es wieder ruckweis durch ein zweites ersetzt usf.[1]) Bei den üblichen Filmen werden 15 bis 25 solcher Einzelbilder in einer Sekunde aufgenommen. Wie kommt es nun, daß wir trotz dieser Einzelbilder den Eindruck einer stetigen Folge von Bildverwandlungen haben? Der Grund ist der, daß ein Bild, das in unser Auge fällt, noch einige Zeit nachwirkt, $\frac{1}{10}$ Sekunde oder länger. Den Nachweis für diese Nachwirkung kann man in bekannter Weise erbringen, indem man einen glühenden Körper möglichst rasch im Kreise schwingt. Dann sieht man nicht einen bewegten Punkt, sondern einen Kreis. Wenn du eine Stricknadel an dem einen Ende festklemmst und das andere zur Seite biegst und zurückschnellen läßt, dann beobachtest du eine flächenartige Verbreitung des freien Teils der Nadel, nicht etwa eine Aufeinanderfolge verschiedener Stellungen.

---

1) Näheres über die Kinomatographie ist einem Bändchen aus der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt": H. Lehmann, Die Kinematographie, Leipzig, Teubner 1911, zu entnehmen. Daher stammt auch Fig. 17.

Diese Versuche zeigen uns, daß das Auge zur Beobachtung von Vorgängen, die sich in Zeiten kleiner als 0,1 Sekunde abspielen, nicht geeignet ist. Dafür noch ein sehr schönes Beispiel: Vor dem Aufkommen der Momentphotographie hat man die Beinstellung der Pferde bei einem Wettrennen immer falsch gesehen. Alle Bilder älterer Pferdemaler geben die Beine in einer Stellung wieder, die sie tatsächlich in keinem Augenblick haben, nämlich die Vorderbeine nach vorn und gleichzeitig die Hinterbeine nach hinten geworfen. Erst seitdem die Photographie uns die Augen öffnete, sehen auch die Maler richtig. — Übrigens beruhen viele Taschenspielerkunststücke, z. B. mit Karten, auf Bewegungen von außerordentlicher Schnelligkeit. — So wird man es begreiflich finden, daß bei Beobachtungen kleiner Zeiten an Stelle des Auges vielfach die photographische Platte tritt. (Auf andere Methoden zur Messung kleiner Zeiten wollen wir hier nicht eingehen.)

Das Ohr übertrifft das Auge in der Auffassung kleiner Zeiten. Dafür ein Beispiel. Im Kriege hat man für die Feststellung des genauen Ortes eines nicht sichtbaren feindlichen Geschützes ein Verfahren ausgearbeitet, bei dem der Knall beim Abschuß genau zeitlich festgestellt werden muß. Wenn der Beobachter den Knall hört, hat er auf eine Taste zu drücken. Nun braucht es eine gewisse Zeit, um das auszuführen, bei dem einen etwa 0,25 Sekunden, bei andern nur 0,17 Sekunden usf. Die Beobachter werden genau auf diese ihre „persönliche Gleichung" geprüft. Da ist es nun interessant, daß die durch häufige Prüfungen geübten Ausbildungsoffiziere in der Lage sind, die Größe der „persönlichen Gleichung" auf ein bis zwei hundertstel Sekunden genau lediglich auf Grund dessen, was sie hören, anzugeben.

Welche Bedeutung die Erschließung kleiner Zeiten für die Technik hat, soll uns noch ein zweites Beispiel lehren, die Untersuchung der Geschoßbahn und der Geschoßwirkung.[1]) Das gegenwärtig verwandte Spitzgeschoß verläßt das Gewehr mit einer Geschwindigkeit, die nur wenig unter 1000 Meter in der Sekunde beträgt. Das Geschoß würde also, wenn keine

1) Ausführlichere Darstellungen der hier angeschnittenen Fragen finden sich im 22. Bändchen der Math.-phys. Bibl.: A. Witting, Soldatenmathematik, Leipzig, Teubner, 1916.

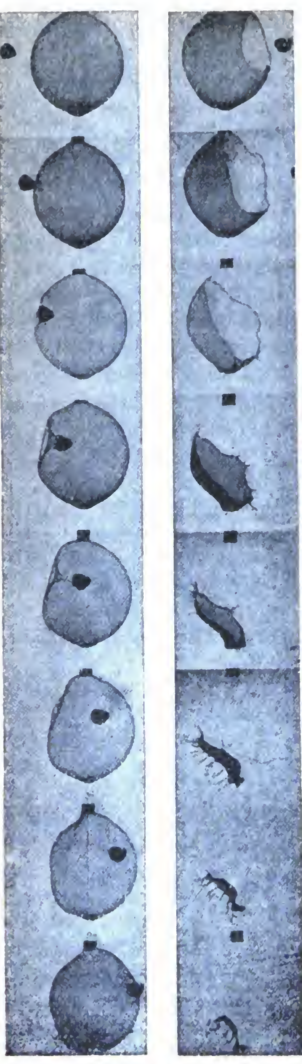


Fig. 17.

Verzögerung einträte, in einer Sekunde angenähert 1 km zurücklegen. Um die Bahn des Geschosses und sein Verhalten dabei, z. B. seine Drehung infolge des Dralles des Gewehrlaufes, die Verdichtung der Luft u. dgl., zu beobachten, muß man photographische Aufnahmen in sehr kurzen Zeiten nacheinander machen. Die Aufnahme mit einem gewöhnlichen Kinoapparat würde keine Ergebnisse zeitigen. Führen wir die neue Zeiteinheit 1 σ (gelesen 1 Sigma) zur Abkürzung von $\frac{1}{1000}$ Sekunde ein, so bewegt sich das Geschoß in 1 σ schon um einen Meter vorwärts. Wir müssen auf noch kleinere Zeiten zurückgehen, um im Bereich einer Plattengröße mehrere Aufnahmen zu bekommen. Auch Momentverschlüsse der gewöhnlichen Art versagen. Man nimmt seine Zuflucht zum elektrischen Funken; die nähere Einrichtung kann wieder nicht in Kürze geschildert werden. Ein Franzose Bull hat mit einer Anordnung, die 2000 Aufnahmen in der Sekunde gestattet, schon recht schöne Ergebnisse erhalten. Fig. 17 zeigt z. B. den Durchgang einer (weit langsamer als ein Spitzgeschoß fliegenden) Pistolenkugel durch eine Seifenblase; sie hängt an einem in manchen Bildern

oben sichtbaren Rohre. Die Kugel dringt in die Seifenblase ein, die Öffnung schließt sich wieder, beim Austritt wird erneut ein Loch gerissen, das vergrößert sich und die Seifenblase wird zerstört. Leider ist kein Maßstab beigegeben. Die einzelnen Aufnahmen folgen sich, da 2000 auf eine Sekunde kommen, in $\frac{1}{2}$ σ. Man kann, wenn man den Durchmesser der Seifenblase kennt, die Geschwindigkeit der Kugel bestimmen (man sieht, daß sie in etwa 3 σ die Seifenkugel durchschlägt); man kann den zeitlichen Verlauf der Zerstörung der Seifenblase durch Messung verfolgen usf. Man hat diese Methode der Funkenphotographie neuerdings noch vervollkommnet. Man arbeitet mit Apparaten, die Bilder in Intervallen von $\frac{1}{5}$ σ und weniger liefern.

Überall, wo es sich um Bewegungsvorgänge handelt, sind Zeitmessungen aufs engste mit Wegmessungen verbunden. Wir wollen gleich die Fortsetzung unserer gewöhnlichen Längenmaße ins Reich der Zahlenzwerge hinein kennen lernen. Man teilt 1 mm in 1000 μ (gelesen Mikron oder auch einfach My). Ein Mikron wird wieder in 1000 μμ (gelesen Millimikron oder kurz Mymy) geteilt. Ein Millimikron ist nun allerdings eine sehr, sehr kleine Strecke. Sie verhält sich zu einem Millimeter, wie ein Millimeter zu einem Kilometer. Wie das Millimeter der millionste Teil des Kilometers ist, so ist das Millimikron der millionste Teil des Millimeters!

Es ist leicht, solche Maße festzulegen. Die Frage ist nur, haben sie irgend eine Bedeutung. Können wir solche kleinen Strecken noch messen, können wir sie irgendwie feststellen. Das stärkste Mikroskop macht ein Millimikron nicht sichtbar. Mit ihm können wir höchstens Größen von etwa 200 μμ Querschnitt noch sehen. Weiter bringt uns das Ultramikroskop, das um die Jahrhundertwende entdeckt wurde. Erst in den letzten Jahren sind wir durch die glänzende Entdeckung von v. Laue dazu gekommen, unter gewissen Umständen die Existenz weit kleinerer Gebilde nachzuweisen und der Messung zu erschließen, deren Durchmesser vielleicht von der Größenordnung eines Millimikrons ist.

Gold kann man durch mechanisches Hämmern in außerordentlich dünne Blättchen verwandeln. 1 Kubikmillimeter (1 mm^3) läßt sich zu einer Fläche von etwa einem Quadratdezimeter (1 dm^2) aushämmern. Nennen wir die Dicke eines

solchen Blättchens x, so ist, wenn wir alles in Millimetern ausdrücken, $1\,mm^3 = x \cdot 10000\,mm^2$, denn $1\,dm^2 = 10000\,mm^2$. Die Dicke des Blättchens ist danach $\frac{1}{10000}$ mm oder 100 µµ. Noch dünner sind gewisse Ölhäute, die entstehen, wenn man einen Tropfen Öl auf Wasser bringt. Das Öl breitet sich sofort so weit wie möglich auf der Wasserfläche aus, die Schicht wird dünner und dünner. Weiß man, wieviel Öl man auf das Wasser getan hat, und mißt man die Fläche der Ölschicht, so läßt sich die Dicke leicht berechnen. Man beobachtet nun folgendes: Die Haut zerreißt bei fortschreitender Verdünnung in Fetzen, etwa dann, wenn die Dicke 100 µµ beträgt. Zwischen den einzelnen sichtbaren Fetzen befindet sich aber noch eine sehr dünne Ölschicht, deren Dicke 20 µµ und weniger beträgt. Da sind wir schon zu Größen gekommen, die gemessen an unserer sichtbaren Welt außerordentlich klein sind. Man hat beobachtet, daß bei weitergehender Verdünnung der Fettschicht sich das physikalische Verhalten, etwa wenn eine Dicke von 1 µµ erreicht ist, wesentlich ändert. Die Änderung läßt sich am besten durch Annahme einer körnigen Struktur des Öles erklären. Die Schicht verhält sich nicht mehr so wie eine zusammenhängende Flüssigkeit, sondern wie ein aus einzelnen voneinander getrennten Körnchen bestehender Stoff.[1])

Man hat schon früh die Frage aufgeworfen, ob man die Materie immer weiter in kleine und kleinste Teile teilen kann. Verschiedene Tatsachen haben zu der Annahme geführt, daß das nicht möglich ist, daß die Stoffe, feste, flüssige wie gasförmige, aus kleinsten Teilen zusammengesetzt sind, den Molekülen. Die Größe dieser Teilchen kann man auf Grund verschiedener Annahmen berechnen; man erhält Werte von der Größenordnung $\frac{1}{2}$ µµ. Versuche wie der eben beschriebene mit den Fetthäutchen scheinen die Annahme zu stützen. Sehen konnte man diese kleinsten Teilchen bisher nicht. Das Mikroskop versagte, ebenso das Ultramikroskop. Die kleinste mit dem Mikroskop wahrnehmbare Größe ist noch tausendmal so groß wie ein Molekül, verhält sich also zu ihm wie ein Kirchturm zu einem Zylinderhut. In allerjüngster Zeit hat

1) Näheres über diese Fragen ist z. B. in Band 58 der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“ nachzulesen: G. Mie, Moleküle, Atome, Weltäther. 2. Aufl. Leipzig, Teubner, 1907.

die Entdeckung von v. Laue einen Weg gewiesen, mit Hilfe der Röntgenstrahlen auch in die Welt dieser kleinen Größen einzudringen, von ihrer Lagerung in Kristallen Bilder zu erhalten, die wir messend und rechnend verfolgen können. Die Wissenschaft ist gegenwärtig dabei, mit Hilfe dieses Verfahrens den Bau der Moleküle und Atome aufzudecken und auszumessen.

Wir sahen, wieweit etwa man in das Reich der kleinen Zeiten und der kleinen Strecken mit unseren gegenwärtigen Beobachtungsmitteln vordringen kann. Wir kehren nun zurück in die Welt der kleinen Zahlen, wo nicht die Wirklichkeit unseren Gedanken solche Schranken setzt.

In der Mathematik spielen die kleinen Größen besonders da eine Rolle, wo es sich um Werte handelt, die man mit unserem Zahlsystem nicht genau ausdrücken kann, wo man Näherungswerte an ihre Stelle setzt. Ein ganz einfaches Beispiel wird zeigen, wie ich das meine. Wenn man $\frac{1}{3}$ in einen Dezimalbruch entwickelt, kommt ein sogenannter unendlicher Dezimalbruch heraus. Diese Zahl 0,3333... kann man nie genau hinschreiben. Wo man auch abbricht, immer macht man einen Fehler. Es ist aber immer möglich, diesen Fehler unter jede verlangte Größe herabzudrücken. Ich kann dafür sorgen, daß der Fehler kleiner als 0,0001, kleiner als 0,0000001 wird usf. Ich brauche zu dem Ende nur den periodischen Dezimalbruch weit genug hinzuschreiben, also 0,3333 und 0,3333333.

Wir wollen das noch etwas genauer bei einer Zahl verfolgen, bei der die Dinge nicht so einfach liegen, wie eben bei dem Bruch $\frac{1}{3}$, bei der Zahl π. Sie ist uns in diesem Bändchen schon einmal (S. 28) begegnet, als es sich um die Ausrechnung des Umfanges eines Kreises handelte. π ist eine abkürzende Bezeichnung für die Zahl, mit der man den Durchmesser eines Kreises multiplizieren muß, um den Umfang zu erhalten. Diese Zahl hat ihre lange Geschichte.[1]) Man hat erst ganz rohe Annäherungswerte für sie gefunden. So heißt es in der Bibel von einem kreisrunden Gefäß: „Und er fertigte das Meer, aus Erz gegossen, von einem Rande bis zum an-

---

1) Diese Geschichte behandelt das 12. Bändchen der Math.-phys. Bibl.: Beutel, Die Quadratur des Kreises. Leipzig, Teubner, 1913.

dern 10 Ellen weit, ringsum rund, und eine Schnur von 30 Ellen umspannte es ringsum." Hier wird also für π der Wert 3 angenommen.[1]) Wenn du etwa mit einem neuen Fünfmarkstück den Wert π praktisch bestimmst, siehst du, daß das nicht richtig ist. (Miß den Durchmesser und rolle den Umfang des Geldstückes längs eines Maßstabes ab.) Vielfach begnügt man sich im praktischen Leben mit dem Werte $3\frac{1}{7}$. Aber auch dieser Wert ist nicht etwa genau. Archimedes, der auch um die Berechnung von π große Verdienste hat, zeigte schon, daß π zwischen $3\frac{10}{70}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. Im Laufe der Jahrhunderte hat man gelernt, π immer genauer auszurechnen. Die ersten Stellen sind 3,141592653 ... Um sie zu merken, hat man Verse erdacht, bei denen die Buchstabenzahl der einzelnen Worte die Ziffer angibt. Ich nenne von den nicht wenigen deutschen, französischen und englischen oft fürchterlichen „Gedichten" eines, das von P. Weinmeister stammt:

> Wie, o dies π
> Macht ernstlich so vielen viele Müh'.
> Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
> Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.

Die Zahl π nennt man zuweilen die Ludolfsche Zahl, weil Ludolf van Ceulen, der um 1600 lebte, sie zuerst auf eine größere Anzahl Stellen, erst 20, dann 32, schließlich 35 berechnet hat. Vega, dessen Logarithmentafeln weit bekannt geworden sind, hat π auf 140 Stellen berechnet; der Rechenkünstler Zacharias Dahse (S. 35) rechnete in zwei Monaten 200 Dezimalen aus, Rutherford (1833) 440, Professor Richter in Elbing 500, schließlich ein Engländer W. Shanks gar 707 Stellen. So ist die Zahl π, wiewohl ihrem Werte nach weder ein Riese noch ein Zwerg im Reiche der Zahlen, ihrer Stellenzahl nach ein Riese geworden.

Doch wir wollten ja diese Zahl dazu benutzen, um uns die Bedeutung des Fehlers bei den Näherungswerten deutlich zu machen. Wenn wir π auf nur vier Stellen nach dem Komma abkürzen, also den Wert 3,1416 wählen, so ist der Fehler, den wir damit begehen, jedenfalls kleiner als 0,0001 (in Wirk-

1) Es mag angemerkt werden, daß man die Stelle auf Grund der Fassung des hebräischen Textes auch so ausgelegt hat, daß nicht für π der rohe Näherungswert 3 vorliege, sondern daß die Angabe 10 Ellen nur angenähert sei.

lichkeit ist er weit geringer). Wenn ich also den Durchmesser eines Kreises ganz genau messen könnte, so wäre der mit Hilfe dieses Näherungswertes berechnete Kreisumfang sicher bis auf $\frac{1}{10\,000}$ des Durchmessers genau richtig. Würde es sich z. B. um einen Kreis von 100 m Durchmesser handeln, so wäre der Umfang auf $\frac{1}{10\,000}$ von 100 m, d. h. auf einen Zentimeter genau berechnet. Man sieht, das ist schon eine ganz ansehnliche Genauigkeit, die z. B. die in der Technik, der Architektur usf. erreichbare weit übersteigt.

Doch weiter. — Wir wollen für π einen Wert von 26 Stellen nach dem Komma nehmen. Dann ist der Fehler kleiner als Eins durch hundert Quadrillionen. Nehmen wir jetzt einen Kreis vom Radius fünfzig Billionen Kilometer an. Das ist etwa eine Strecke von fünf Lichtjahren (s. S. 23) oder etwas mehr als die Entfernung des nächsten Fixsterns. Dann ist die Genauigkeit, mit der ich mit Hilfe des 26-stelligen Wertes von π den Umfang dieses Riesenkreises berechnen könnte, der hundertquadrillionste Teil dieses hundert Billionen Kilometer zählenden Kreisdurchmessers. Das bedeutet aber eine Genauigkeit von ein billionstel Kilometer oder, was dasselbe ist, von einem Millimikron. Vergleiche diesen gewaltigen Kreis, der sich in Fixsternweiten erstreckt, mit diesem kleinen Fehler, der von der Größenordnung der Moleküle ist. Und doch sind da erst 26 Stellen von π berücksichtigt, und man kennt 707!

10. VERANSCHAULICHUNG VON ZAHLEN DURCH FLÄCHE UND KÖRPER

Wenn wir nebeneinanderlegen: eine Strecke von 10 cm Länge, ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge, einen Würfel von 10 cm Kantenlänge, und wir verdoppeln die genannten Längen, so erhalten wir eine Strecke, die noch einmal so groß ist wie die erste, ein Quadrat, das vier mal so groß ist als das erste, einen Würfel, der acht mal so groß ist als der erste. Dieses verschiedene Verhalten ist der Kern mannigfacher Abschätzungsfehler.

Wieviel Menschen würden auf den Bodensee gehen, wenn er gefroren ist? Gewiß eine recht große Menge, wirst du sagen, vielleicht eine Million. Stellen wir die Menschen so, daß etwa drei auf ein Quadratmeter gehen. Das ist eine

ganz bequeme Aufstellung; im Gedränge stehen die Menschen enger beieinander. Der Bodensee hat eine Fläche von 539 km^2. Nun ist 1 km^2 = 1000000 m^2; auf ein Feld von einem Quadratkilometer Größe gehen also 3 Millionen Menschen (mehr als in ganz Groß-Berlin wohnen!) Auf dem Bodensee haben danach mehr als anderthalb Milliarden Menschen Platz, d. i. die gesamte Bevölkerung der Erde!

Noch mehr sind Schätzungsfehler bei Raumgrößen an der Tagesordnung. Man macht sich in der Regel nicht klar, daß eine Zigarre oder ein Lenkballon, dem man in Länge, Breite und Höhe die doppelten Ausmessungen gibt als einer Vorlage, den achtfachen Inhalt hat, daß man an der Riesenzigarre acht mal so lange rauchen kann, daß zur Füllung des Riesenballons die achtfache Gasmenge nötig ist. Als Gulliver bei den Lilliputanern war, wurde in einem Vertrag ausgemacht, daß er ebensoviel an Speise und Trank erhalten sollte, wie 1728 Lilliputaner. Die kleinen Leute hatten nämlich seine Höhe zu der Zwölffachen ihrer eigenen bestimmt — und nun überlege selbst, wie sie zu der Zahl im Vertrage gekommen sind.

Wenn dich jemand fragt, wieviel Ziegelsteine oder wieviel Streichholzschachteln auf einen Kubikkilometer gehen, so wirst du gewiß eine viel zu niedrige Zahl angeben. Berechne einmal diese Zahlen; du brauchst ja nur die Seiten dieser Körper auszumessen, durch Multiplikation dreier aneinander stoßender Kanten den Rauminhalt festzustellen und nun auszurechnen, wie oft dieser Raum in einem Kubikkilometer enthalten ist. — Die Sonne hat, wie du in vielen Büchern angegeben findest, den 109fachen Durchmesser der Erde. Daraus ergibt sich, daß die Oberfläche der Sonne schon 11900 mal so groß, der Rauminhalt gar 1300000 mal so groß ist wie der der Erde.

Ich muß da an eine schöne Rechnung von Leberecht Hühnchen (in Heinrich Seidels so betitelten Geschichten) denken. Hühnchen liegt auf seinem eigenen Grundstück und grübelt darüber nach, ob nun auch die Erde unter ihm und Luft und Äther über ihm sein Eigen sind. „1300 m^2 war es (sein Grundstück) groß hier auf der Erde. Rechnete man nun die Entfernung der Sonne rund zu 24000 Erdhalbmessern, so ergab sich nach dem Satze, daß der Flächen-

inhalt eines Kegelquerschnittes[1]) sich vergrößert mit dem Quadrat der Entfernung von der Spitze, also in Sonnenweite folgenden Inhalt. ...... 748800 km². Das sind über 200 000 km² mehr als die Größe von Deutschland. Was mache ich mir aus 200 000 km² bei solchem Reichtum? Weg damit! Wir nehmen also an, daß der Inhalt meines Grundstückes in Sonnenweite gleich dem Flächenraum von Deutschland ist. Erhabenes Gefühl, nicht wahr? Aber es kommt noch viel schrecklicher. Einer der uns am nächsten liegenden Fixsterne ist der Sirius. . . ." – Doch nun lies bei Seidel weiter oder rechne und phantasiere selbst darauf los!

Das Gewicht eines Körpers erhält man, wenn man seinen Rauminhalt mit einem Faktor multipliziert, den man das spezifische Gewicht nennt. Dieses spezifische Gewicht gibt an, wieviel mal so schwer ein Stück des Körpers ist als ein gleich großes Volumen Wasser. Die Schätzung des Gewichtes hängt danach aufs engste mit der des Rauminhaltes zusammen. Auch hier sind grobe Schätzungsfehler überaus häufig. Wie schwer ist eine Korkkugel von einem Meter Halbmesser? Du schätzt vielleicht 10 oder 20 Pfund, vielleicht etwas mehr. Kork ist ja ein sehr leichter Körper. Sein spezifisches Gewicht ist 0,24, d. h. er ist nur etwa den vierten Teil so schwer wie eine gleich große Menge Wasser. Wir wollen der Sache mit der Rechnung nachgehen. Für die Berechnung des Kugelinhaltes gibt es eine einfache Formel, er ist $\frac{4}{3}\pi r^3$, wo r den Radius bedeutet und π die uns schon bekannte Zahl ist. Ein Liter Wasser wiegt 1 kg. Ein Liter ist dasselbe wie ein Kubikdezimeter. Ein Kubikmeter hat 1000 Liter. Das Gewicht eines Kubikmeters Wasser beträgt also 1000 kg oder eine Tonne. Die Korkkugel wiegt also $\frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}24$ Tonnen, das ist, da π etwa 3 ist, ungefähr eine Tonne. Nicht 20 Pfund wiegt die Korkkugel, sondern reichlich hundert mal so viel.

Ich will dir noch ein paar Aufgaben mitteilen, die du selbst behandeln magst, um den Unterschied zwischen oberflächlicher Schätzung und rechnerischem Überschlag zu erkennen; du kannst ja dann deine Freunde damit aufs Glatteis führen:

---

1) Lieber Leberecht, es muß wohl Pyramidenquerschnitt heißen; oder ist dein Grundstück kreisförmig?

Wie viel wiegt und welchen Wert hat eine Goldkugel von der Größe deines Kopfes? — Das spezifische Gewicht von Gold ist etwa 19. Alles andere mußt du selbst ausmessen oder ausrechnen, z. B., um den Wert des Goldes zu erhalten, feststellen, was ein Zwanzigmarkstück wiegt.

Wie groß ist die Seite eines Goldwürfels, der ebensoviel wiegt, wie alle Menschen auf der Erde zusammen? — Nimm an, daß das Durchschnittsgewicht jedes der anderthalb Milliarden Menschen ein Zentner ist.

Um wieviel würde der Bodensee steigen, wenn man die gesamte Menschheit in ihn hineinwerfen würde? — Du kannst annehmen, daß das spezifische Gewicht des Menschen ungefähr 1 ist.

Wie schwer ist die Luft in einem Saal von 12 Meter Breite, 30 Meter Länge und 8 Meter Höhe? — Das spezifische Gewicht der Luft ist 0,001293.

Man kann das gewaltige Anwachsen von Flächen- und Raumgrößen zur Veranschaulichung großer Zahlen ausnutzen. Wir hatten im 4. Abschnitt gesehen, daß wir bei Veranschaulichungen von Zahlen durch Strecken schon bei Größen von einer Milliarde auf Schwierigkeiten stoßen. Wir kommen zu Strecken, die unsere Erfahrungen übersteigen. Anders, wenn ich Raumgrößen heranziehe. Veranschauliche ich die 1 durch einen Würfel von 1 mm^3, so wird 10 durch eine Säule aus solchen kleinen Würfeln von 1 cm Höhe, 100 durch eine Platte von 1 cm Länge und 1 cm Breite, dargestellt, 10 solcher Platten liefern wieder einen Würfel, der nun die Zahl 1000 dar-

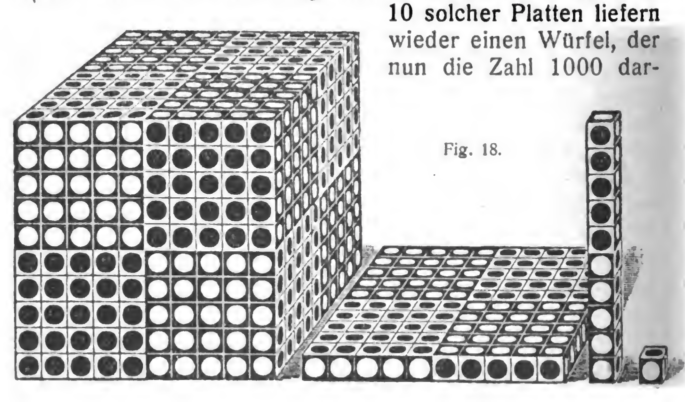


Fig. 18.

stellt. Fig. 18 gibt das ausgeführt mit Würfeln größeren Maßstabes wieder; die Figur zeigt ein beim Rechenunterricht gebrauchtes Veranschaulichungsmittel von Beetz, das auch bei größeren Zahlen nicht versagt. Aus den Kubikzentimetern kann ich mir nun einen Kubikdezimeter aufbauen. Er stellt bereits die Zahl 1000000 dar. Ein Kubikmeter würde eine Milliarde darstellen, ein Kubikkilometer (um sich eine solche Größe vorzustellen, muß man schon zu Bergen seine Zuflucht nehmen) würde eine Trillion darstellen. Mit dieser räumlichen Veranschaulichung können wir überdies mit Leichtigkeit in noch größere Zahlengebiete übergehen, wenn wir statt der irdischen Verhältnisse Größen des Weltenraumes heranziehen. Die Rauminhalte der Erde (wieviel Kubikkilometer sind das?), der Sonne (wieviel sind das?), der Raum, der unserem Planetensystem bis zum Neptun einschließlich zukommt usf. reichen zur Veranschaulichung ungleich größerer Zahlen als der Trillionen aus.

Und doch sind auch hier Grenzen gezogen. Jene Annahmen, die Archimedes über die Größe des Weltenraumes machte (S. 12), jene langen Zahlen bei Schwenter (S. 10) oder etwa die Tatsache, daß nach heutiger Ansicht die weitesten noch sichtbaren Objekte des Sternenhimmels vielleicht 1000 Lichtjahre von uns entfernt sind, deuten diese Grenzen an.

Anders wäre es, wenn wir zu vier-, fünf- und mehrdimensionalen Gebilden aufsteigen könnten. Aber leider sind solche etwa nach Art des Würfels gebauten Gebilde unserer menschlichen Anschauung nicht zugänglich. Der Mathematiker kann zwar mit ihnen rechnen, aber das hilft uns hier nichts, wir brauchen die Anschauung. Wäre es anders, so könnte man durch Verzehnfachung der Kante eines vierdimensionalen Würfels das 10000fache erhalten, durch Verzehnfachung eines fünfdimensionalen Würfels gar das 100000-fache usf., und das gäbe Mittel und Wege zur Veranschaulichung weit größerer Zahlen, als eben in unserem dreidimensionalen Raum.

Ich will diesen Abschnitt mit der Betrachtung einer Zahl schließen, die in der Physik eine beherrschende Rolle spielt. Wir hatten schon früher einmal von den Molekülen gesprochen. Nicht nur ihre Größe kann man einigermaßen sicher angeben, auch ihre Anzahl in gegebenem Raum. Man weiß,

daß in einem Kubikzentimeter, also ungefähr in einem Fingerhut, irgend eines Gases gegen 28 Trillionen Moleküle herumwimmeln. Der Durchmesser des Moleküls ist beim Wasserstoffgas etwa 0,4 μμ. Wenn ich alle diese 28 Trillionen Moleküle als Volumen zusammennehme, so bekomme ich natürlich weniger als einen Kubikzentimeter heraus, sogar weit weniger, denn zwischen den einzelnen Molekülen ist ein beträchtlicher Zwischenraum. So klein ist also das gesamte „Molekülfleisch". Wie nun aber, wenn ich die Moleküle wie die Perlen einer Perlenschnur aneinanderreihe, in einer einzigen langen Linie? Die Rechnung ist leicht durchgeführt. Ich erhalte eine Länge von 0,4 μμ mal 28 Trillionen. Das gibt etwa 11 Millionen Kilometer; die Molekülkette würde fast dreihundert mal um die Erde herumreichen.

Wir wollen nun die Moleküle in einer Fläche ausbreiten. Wir nehmen ein Brett, dessen Breite $\frac{1}{2}$ Meter ist. Wie lang muß es sein, wenn es alle Moleküle aufnimmt? Schätze zuerst und dann rechne es mit mir aus! Wir legen soviel Reihen nebeneinander, als $\frac{1}{2}$ Meter in den 11 Millionen Kilometern enthalten ist. Das ist 22 Milliarden. Jede dieser 22 Milliarden Reihen ist 0,4 μμ breit, das war ja die Dicke jedes Moleküls. Ich erhalte also für die Länge des Brettes 0,4 μμ · 22 Milliarden. Das ist 8,8 Meter. So gehen also die Moleküle auf ein Brett, das die Größe einer etwas ansehnlich gewählten Stubendiele hat. Auch ein größerer Tisch könnte sie aufnehmen. Hattest du so auch geschätzt?

11. WARUM AUCH IM LANDE DER RIESEN UND DER ZWERGE MIT GEWÖHNLICHEN ZAHLEN GERECHNET WIRD

Denke dir ein Land von Riesen. Alle, die dort wohnen, sind große Menschen, im Durchschnitt vielleicht 10 Meter hoch, die Kinder natürlich kleiner. Meinst du, daß diese Leute sich untereinander als Riesen fühlen? — Oder denke dir ein Land von Zwergen. Alle sind sie, die dort wohnen, höchstens 10 cm groß. Meinst du, diese Däumlinge fühlten sich als Zwerge? Gewiß nicht. Aber wenn du, wie Gulliver einst, zu ihnen reistest! Kämst du zu den Riesen, würden sie ausrufen: „Welch'

ein Zwerg!" Und kämst du zu den Zwergen, würden sie sagen: „Welch' ein Riese!"

Du verstehst: Es kommt alles auf die Einheit an, die man als Grundmaß nimmt. Du urteilst von deiner Körpergröße aus, die Riesen von ihren 10 Metern, die Zwerge von ihren 10 Zentimetern. Und nun male dir den Gedanken einmal weiter aus. Nimm an, die Moleküle — du weißt, für was für Zwerge wir sie halten — könnten denken wie du, oder, wenn dir das zu merkwürdig erscheint, auf ihnen wohnten kleine Menschlein, wie wir auf der Erde, die Mathematik trieben wie wir. Was uns Zahlenzwerge im R ume sind, sind ihnen Zahlenriesen gewaltigster Art. — Und dem stelle gegenüber ein Riesenlebewesen. Die Erde und die Sonne und die Sterne sind die Moleküle, aus denen es aufgebaut ist. Was sind für diesen Übermenschen die Zahlenriesen, die unserer Anschauung verschlossen sind?

Was ich sagte, bezieht sich auf die Zahlen, in denen Strecken, Längen, Körper ausgedrückt werden, Gewichte, Geschwindigkeiten und was mit jenen zuerst genannten Größen zusammenhängt. Der Molekülmensch wird andere Einheiten haben wie wir, wieder andere der Weltenmensch. Ihre Rechnungen aber werden ähnlich so aussehen wie die unseren. Sie werden nicht etwa mit einem Zwergeneinmaleins und einem Rieseneinmaleins rechnen. Ihr tägliches Brot beim Rechengeschäft wird genau so aussehen, wie bei uns auch.

Raumgrößen kommt also an sich kein bestimmter Zahlenwert zu. Der hängt vielmehr ganz von der gewählten Einheit ab. Daß es mit Zeitgrößen, mit Gewichten, Geschwindigkeiten usf. ebenso ist, wirst du dir nun selbst klarmachen können.

Ich will dir zum Schluß noch eine letzte Geschichte erzählen, die diese „Relativität" der Raum- und Zeitgrößen in drolliger Weise ausführt. Sie steht wieder bei Kurd Laßwitz, von dem wir schon einmal gehört haben. Da hat ein Gelehrter einen Apparat entdeckt, der ihm gestattet, seine Größe beliebig zu verkleinern. Auch seinen wißbegierigen Neffen kann er mit auf die Reise nehmen. Der läßt eben eine Seifenblase fliegen und schwupp sind beide, gehörig verkleinert, auf der Seifenblase. Die Seifenblase ist ihre Erde geworden. Sie ist auch dick genug, die Last von Onkel und Neffe zu tragen, denn mit der Größe hat sich auch das Gewicht ent-

sprechend verringert. Du fürchtest mit dem Neffen, die Seifenblase könnte platzen. Aber der gute Onkel hat auch da vorgesorgt; er kann die Zeit beliebig verlangsamen. Was für uns wenige Sekunden eines Menschenlebens, wird für die beiden die Länge von Jahrmillionen, in denen sich die ganze Entwicklung vom Werden bis zum Vergehen ihrer neuen Erde abspielt. Man trifft natürlich Bewohner auf der Seifenblase, und was die beiden mit ihnen erleben, kannst du selbst nachlesen. Die Geschichte steht in einem Buch, das Laßwitz „Seifenblasen“ genannt hat.

Wir sind am Schlusse unserer Wanderungen in jenem großen Gebiet, das sich zwischen 0 und ∞, zwischen den unendlich kleinen und den unendlich großen Zahlen erstreckt. Wir haben uns, im Gegensatz zum Rechenunterricht in unseren Schulen, vornehmlich in den Gegenden bewegt, die den beiden Grenzen nahe lagen, und sind doch nirgends an die Grenzen recht herangekommen. Es gehört zum Größten, was die Mathematik geleistet hat, daß sie wirklich die Grenzen erreicht hat, daß das Unendlichkleine und das Unendlichgroße ihr vertraut geworden ist. Wir müssen uns begnügen, dieses Ziel anzuzeigen. Wer aber an solche Dinge sich heranwagt, der sollte erst einmal etwas nachsinnen über die Riesen und Zwerge im Zahlenreiche, die doch immer noch endlich bleiben. Mancherlei ließ sich über sie plaudern, Scherzhaftes und Ernsthaftes. Ich hoffe, du bist nicht enttäuscht!





